相対性理論のパラドックス
［増補新版］

＝タキオンの物理＝

テルレッツキー……著
中村誠太郎………監修
林　昌樹……………訳

東京図書

日本語版への序文

本書のロシア語の初版は1966年（モスクワ大学の講義録としてのプレプリント版は1962年）であった．

日本語版も1966年に出版された．初版がこの世に出てから，本書で述べたことの多くの事柄が現代物理学に明瞭なこととして受け入れられてきた．

相対論の本質は「相対性」や光速極限性の要請（すなわち理論の名称とその帰結の1つと結びつき，当初普及した表象）にあるのではなく，相互に関連した時空の Minkowski–Poincaré 連続体という表象にあることは広く認められるようになった．

虚の固有質量をもつ超光速粒子—タキオン—存在の現実的な可能性も論じられるようになった．

負質量の粒子の存在と，それによって生じる物理的，宇宙論的な帰結も広汎に論じられてきた．たとえば，本書でも記述した真空からの（すなわち「無からの」）2個の対粒子—2個の正粒子，ポジトン（positon）と2個の負粒子，ネガトン（negaton）—生成の可能性から，F. Hoyle, H. Bondi, T. Gold 等の定常宇宙，あるいは純粋の真空からの宇宙創成の模型を基礎づけることができる．このような模型では，絶対値が等しい固有質量をもつポジトンとネガトンの等量が生成される．その際，ポジトンは引力により集積し，恒星や銀河を形成するが，ネガトンは宇宙空間の中で散乱され重力遮蔽効果を生み出す．

この模型では，通常の粒子（陽子，電子など）は，反粒子（反陽子，陽電

子など）とは独立に生成されることから，宇宙において粒子が反粒子よりも圧倒的に多く存在するという事実が容易に説明できる．このとき，宇宙の質量は，任意の種類のチャージ（バリオン数とレプトン数の和も含めて）と共に，全体として0に等しい．

理論においては，負エネルギーの電磁場，すなわち，負エネルギーの光子も考慮しなくてはならない．

本版では，1966年版のテキストの一部の不正確さとミスプリを訂正するにとどめた．しかし，1966年版で提起した一連の問題に関して，私がソビエトおよび外国の雑誌ならびに論文集などで発表してきたその後の研究成果を本書に付録として付け加えることにした．

1989年5月21日　　Ya. P. テルレッツキー

原著の序文

よく知られているように，相対性理論によって記述される空間と時間の概念は，これら物質存在の普遍的な形式に対するわれわれの日常の概念とは大きく異なる．日常の概念からは，相対性理論の多くの帰結は《パラドックス》に見える．運動しているものさしの長さの短縮とか，運動している時計のあゆみの遅れなどの結論はいかにもパラドックス的に見える．また信号の伝播速度について設けられる制限もなじみにくいものである．相対論的運動法則にも，たとえば，エネルギー，運動量と質量のあいだの関係式のように，多くの奇妙でパラドックス的にさえ思われるものがある．

本書では，そのような《パラドックス》を相対論的な時間と空間の概念に基づいて記述，解析し，そして解明しようとするものである．そのようなパラドックスの解決によって，相対論的な概念の特殊性と本質が明確になろう．

最初に，相対性理論の名称と真の内容とのあいだに存在する矛盾から由来する，主として哲学的な意味のパラドックスについて考察する．そして，相互に関連した空間と時間の現代の物理理論としての相対性理論は，実証主義的な結論を導く根拠には決してなり得ないことを明らかにする．

運動学的パラドックスの解析（ものさしと時計のパラドックスおよび速度の合成法則とその4次元的解釈など）によって，相対性理論における時間と空間の概念の本質は4次元幾何学的なものであることがいっそう明確になろう．相対論的力学のパラドックスの解析からもまた，相対性理論におけるエ

ネルギーと運動量および固有質量の保存則の普遍的な統合は，自然法則の4次元的なアプローチによってのみ正しく理解できることが明らかになるだろう．

光速度の限界性についてのパラドックスを解析することによって，本質的に新しい理論的な結論が導かれる．エントロピー増大の法則の帰結または表現として理解すべき因果律は，物理的作用の伝播速度が光速を超えることを絶対的に禁止するものではない．禁止されるのは超光速の巨視的な信号だけであり，微視的な可逆過程ではない．このような事情を明らかにすることによって，実験的に観測可能な本質的に新しい物理的な対象と過程の可能性を理論的に予想することができる．

そのような対象として負の質量をもつ粒子があげられる．本書ではそのような粒子の存在を仮定することから導き出される結論について分析する．もし負の質量をもつ粒子が自然界に存在すれば，原理的に新しいとてつもなく強力なエネルギー源が宇宙空間に実現されるはずである．

本書は，著者がモスクワ大学物理学部3年の学生に対して1962年と1964年に行なった講義をもとに書かれている．1962年度の講義録作成にあたっては大学院生 Yu. P. リバコフ氏の多大な援助があったことを付し，ここに深く感謝する．また本書の原稿に目を通し，貴重な助言と意見を頂いた K. P. スタニュコヴィッチ教授にも謝意を表したい．

Ya. P. テルレッツキー

目　　次

装幀　戸田　ツトム

相対性理論のパラドックス

序　論

パラドックス，すなわち，既存の概念とは矛盾し，理論からは予想もされなかった結論は，科学の発展段階で特別な役割を果たすものである．理論上のパラドックスを解決するとき，理論の最も原理的な命題に立ちもどり，その理論と関連した概念に再検討を加え，時にはそれを一層厳密にする必要にせまられる．このように，理論上のパラドックスは，その解決の過程で理論そのものの発展の内的要因となり，その論理的な完成を推し進め，また適用の限界とさらなる一般化の道程を明らかにするものである．

いかなる理論においても発展の主要な原動力となるのは，言うまでもなく，実験と観測によって得られる事実である．しかしながら，これらの事実が理論の論理的構造を確かめ，精確にし，あるいは再検討をせまることがなかったら，事実だけでは理論そのものを確証し，厳密にし，発展させていくことはできない．したがって，理論の発展にはその内部矛盾を明らかにし，それらを解決することが大きな意義をもってくる．理論に現われる矛盾は，それらがなんらかのパラドックスの形をとるとき最もはっきりと姿を現わす．こうして，理論的パラドックスの分析は，それ自体が目的なのではなく理論の真の内容を明らかにし，個々の命題をきわめ，将来の発展の道を見つけだす手段としてのみ意味をもつと言える．

本書では，特殊相対性理論のパラドックスを考察する．ここでは非慣性系への移行に関するいくつかのパラドックスについての考察も試みるが，重力場の理論と関係する問題にはふれない．一般相対性理論は重力場が存在する

ときの非慣性系を取り扱うものであるから，非慣性系の問題は，通常，一般相対性理論の領域に属するものとされている．

アインシュタインによって与えられた古典的な見本にしたがった標準的な記述法のために，相対性理論には多くの矛盾が現われてくる．相対性理論は，アインシュタインの最初の論文が発表された当時にくらべると，多くの新しい概念で補充されてきた．数多くの応用によって，理論の主要な内容が明らかにされた．この理論が生まれた当時，主要なものと考えられたいくつかの概念が，実際には，理論を構成するための補助的な手段にすぎないことも明らかにされた．また理論は異なる要請をもとにして作ることができることもわかった．要するに，アインシュタインの要請は相対性理論の内容そのものとは同一視できないことがはっきりとした．

現在，素粒子の内部の洞察とか，電波銀河や超新星，準星など宇宙における新しい物理現象の発見と関連して，理論的概念の急激な変革を必要とする新しい段階にさしかかっている．まさにこのようなときこそ相対性理論の深い分析が重要となってきたと言える．

相対性理論における信号速度の限界性を分析することによって，いわゆる因果律の内容の再検討が必要となり，さらに負と虚の固有質量をもつ粒子の存在が原理的に可能である，という一般的結論に導かれる．もしこのような粒子が自然界に実在し，発見されれば，従来のすべての自然界の物理的描像は根本的に書きかえられることになろう．

■第1章■

相対性理論の名称と内容

§1. 名称と内容のあいだの矛盾

相対性理論の結論に含まれる多くのパラドックスや矛盾した見解は，相対性理論という名称とその内容のあいだに存在する矛盾から生じている．

《相対性理論》という名称は，理論の内容があたかも《相対的》なものであるかのような感じを与える．理論の根底にある相対性と，われわれの知識の主観的な意味での相対性を説く「相対主義」とを区別することはむずかしい．物理学の理論に対する主観的な解釈は，実証主義者がおおいに重宝がるものであり，観念論哲学者によってさまざまな宣伝材料とされている．相対性理論は，唯物論の基礎をくずす物理理論の例としてあげられる．このことから，現代物理学と弁証法的唯物論が両立しない，という一般化した結論がひきだされるのである．

他方，相対性理論の内容は実際《相対的》だと信じている唯物論哲学者は，相対論を唯物論と矛盾するものとして拒否しようとしたり，「相対主義」とは異なる《物理的相対性》などという概念を根拠づけ，それが現代物理学の根底にある，としたりする．また，この見解を一貫させようとして，主観を測定装置に置き換えることによって理論から主観を排除しようと試みたりする．だが，どんな測定装置も認識する主観をともなってはじめて，物質界における他のすべての研究対象から原理的に区別できるのである．

相対性理論を特定の具体的内容をもつ物理学の理論として取り扱うならば，これら哲学者の論争はまったく無意味なものになってしまう．相対性理

論の内容は，**空間と時間のあいだの幾何学的な相互連関を考慮した時空の物理理論である．**このとき《相対性》は古典力学や他の理論物理学の分野での《相対性》と変わりなく，従属的な性格をおびている．（単に図解的でさえある）．

このように，名称から来る誤った解釈をなくすためには，理論の内容をできるだけ完全に解明することが必要である．

§2.　《相対性理論》の名称のおこり

《相対性理論》の名称は，ポアンカレとアインシュタインが新しい空間と時間の理論を構築するとき理論の基礎においた基本原理，あるいは要請の名称からおこったのである．

《相対性原理》または《相対性の要請》は，光学的，電気力学的現象を説明するために導入された**不動**のエーテルと結びついた，絶対的な固定基準系という概念の**否定**として生まれたものである．

どういうことかというと，20世紀初め，物理学者は弾性理論とのアナロジーを用いて，光学的，電磁気的現象の理論を構築していたのであるが，彼らのあいだに電磁気的エーテルと結びついた絶対固定基準系が存在するはずだ，という誤った考えが生まれていたのである．こうして，古典力学に以前からあった考え方（**ガリレーの相対性原理**）と相反する，エーテルと結びついた系に対する絶対運動という考え方が生まれたのである．しかし，マイケルソンなどによる実験は，この《絶対不動なエーテル》理論を否定し，《相対性原理》という名称を得た逆の主張を定式化する根拠を与えたのである．この名称は，ポアンカレとアインシュタインの最初の論文で導入され根拠づけられた．

アインシュタインの論文《運動している物体の電気力学》[1] からつぎの文章を引用しよう．“……《エーテル》に対する地球の運動を観測しようとする試みは，否定的な結果を与えた．このことから，力学だけでなく電気力学

においても諸現象のあらゆる特徴は絶対静止の概念とは相容れない，という仮定に導かれる．それだけでなく，さらに力学の方程式が成り立つすべての座標系に対して，1次の量についてはすでに証明されているように，同一の電気力学的，光学的法則が成立する，という仮定に導かれる．われわれは，この仮定（その内容は以後《相対性原理》と呼ぶ）を前提に変えよう”．

アインシュタインとは独立に，ポアンカレ [2] も同様に《相対性の要請》を定式化している．“地球の絶対運動を観測できなかったという事実は，おそらく自然の法則だろう．この法則性を条件なしで認め，《相対性の要請》と名づけるのはごく自然であろう”．こうして，《相対性原理》の名称は19世紀の終わりに電磁現象を力学的に説明しようとして導入された**絶対**基準系と，この系に対する**絶対**運動の概念の**否定**として生まれた．

この名称が理論の出発点の本質とそのすべての内容を反映していないという事実は，相対性理論の研究にたずさわってきた学者によって何度も指摘されてきた．

たとえば，ソビエトの著名な理論物理学者 L. I. マンデルシュタム [3] は，相対性理論の講義でつぎのように解説している．“相対性原理という名称は，最もふさわしくない名称の1つであろう．理論は現象が，孤立系の非加速運動に依存しないことを指摘している．相対性原理という名称は，後に見るようにしばしば誤解を招く”．

相対性理論の建設者のひとりで，理論の内容を4次元幾何学の形式に記述したヘルマン・ミンコフスキーも名称のまずさを指摘している．既に1908年に，彼はつぎのように主張している [4]．“……群 G_c に対する不変性の要求を表わすのに，用語《相対性の要請》はふさわしくないように思われる．要請の意味を要約すると，われわれが諸現象を取り扱うことができるのは，4次元の時空の世界においてであり，この世界の空間と時間への射影は，ある任意性をもって選ぶことができるということにある．したがって，私はこの主張に**絶対世界の要請**とでも名づけたい”．

このように，《相対性理論》と《相対性原理》という名称は，理論の真の内容を反映していないと言える．

§3.　時空の現代理論である相対性理論

相対性理論の内容を，時空の4次元理論として最初に明確に定式化したのは，ヘルマン・ミンコフスキー(1908年)であった．4次元時空の概念に基づいて初めて，アインシュタインは重力現象を含む時空の一般理論（いわゆる**一般相対性理論**）を構築することができた（1916年)．本節において，相対性理論を4次元の時空理論として特徴づける基本的な命題を簡単に述べよう．

相対性理論の時空に対する考え方とニュートン力学のそれとの主要な違いは，**空間と時間**の有機的な**相互連関**である．この相互連関は，1つの基準系から他の基準系へ移行する際の空間座標と時間の変換式，すなわち，**ローレンツ変換**の式によってその本質が明らかにされるのである．

あらゆる物理現象は時空において起こり，時空以外の別の方法では，われわれの意識の中に描くことができない．時空は物質の普遍的な存在形式であり，どんな物質も時空外には存在し得ない．

時空を表現する具体的方法として**基準系**——すべての可能な時空の点の仮想的な空間座標網と時間の連続性を構成する，数 x, y, z, t から成る時空の連続体——が存在する．

同一の時空は相異なる時空網— 基準系 —によって表現される．時空は，数 x, y, z, t の代わりに数 x', y', z', t' によっても表現できるが，これらの数は任意ではなく，時空の性質を表わす特定な形の変換式によって結びつけられる．

こうして，時空の各表現は特定の基準系 Σ と関連づけられる．基準系は実在の**基準物体**と結びつけることも可能であり，そのような物体として任意の剛体を選ぶことができる．空間座標 x, y, z は基準物体の具体的な点と結びつ

けられるか，あるいは基準物体になされる他の操作によって決定できる．時刻 t は，基準物体の種々の点に配置された具体的な時計の示度と結びつけられる．時空の関係を具体的に測定するには，明らかに基準物体が必要である．

しかし，操作主義哲学を支持する物理学者が提案しているように，基準物体と基準系とを同一視すべきではない．現象の記述には，基準物体となりうる実在の重い剛体と結びつけられないものをも含めて，**任意**の基準系を用いてよいのである．そのような任意性の根拠として，あらゆる基準系の完全な同等性の概念があげられる．したがって，基準系の選択は調べようとする現象の表示に都合のよい時空の記述方法の選択にほかならない．

こうして，物理現象を記述するために，認識する主体によって基準系の選択がなされる．それは問題の設定によって選ばれ，必ずしも大きな重い物体と結びつけて考える必要性はない．

もし同一の時空を同様に記述するような 2 つの基準系 Σ と Σ' を選べば，系 Σ と系 Σ' のあいだにつぎの関係が成り立つ．すなわち，2 つの離れた事象が

$$-s_{12}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-c^2(t_1-t_2)^2 \qquad (3.1)$$

と定義された**間隔** s_{12} で隔てられていれば，この間隔 s_{12} は系 Σ から系 Σ' への移行に際して不変である．つまり，

$$-s_{12}^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2-c^2(t_1'-t_2')^2 \qquad (3.2)$$

である．言いかえると，s_{12} は系 Σ と系 Σ' の空間座標と時間とを結びつけるローレンツ変換の**不変量**である．x 方向に等速度 v で運動する座標系へのローレンツ変換は，

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=\frac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.3)$$

で表わされる．

(3. 1)〜(3. 3) より，空間的に隔てられた事象の《**同時性の相対性**》という1つの結論が導かれる．すなわち，もし系 Σ において2つの事象に対して $t_2=t_1$, $x_2 \neq x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1$ が成り立てば，速度 v で運動している系 Σ' ではつぎの式が成り立つ．

$$t_2'-t_1'=-\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1'),\quad x_2' \neq x_1',\quad y_2'=y_1',\quad z_2'=z_1'. \tag{3. 4}$$

すなわち，$t_2' \neq t_1'$. この同時性の相対性は，運動しているものさしの短縮と時計のあゆみの遅れをひき起こす．このことについては，§10 と §11 で詳しく論じよう．

時空座標のこれらの性質は，1つの幾何学的多様体に結びつけられた空間と時間の新しい概念の本質を浮きぼりにする．この多様体は，(3. 1) と (3. 2) によって定義された4次元擬ユークリッド幾何学的なものであり，そこでは時間は空間と緊密な関係をもち，(3. 4) からわかるように，それぞれを切り離しては考えられないのである．

これらの概念から，4次元時空の座標変換に対して任意の物理過程は**共変性**（つまり形式の不変性）の性質をもつ，という自然法則に関する重要な結論が出てくる．この要請は，時空の4次元統一多様体としての概念をも浮きぼりにする．

相対性理論を具体的に応用している物理学者は，理論の内容をこのように描いているのである．そして《相対性》の概念は，現象の時空描写が多様な可能性をもつという意味しかもたない，と考えている．

§4. 相対性理論と相対主義哲学

多くの場合，相対性理論という名称がふさわしくないために，空間と時間の相互連関を表わす新しい理論としての真の内容は，しばしば物理学のあらゆる知識の相対性の概念とすりかえられたりする．基準系と現象表示とが任意に選択できる可能性は，物理理論の内容の相対性は基準系と結びついた**観**

測者に対する相対性の意味であると解釈されたりする．

ここから，観測者が存在しなければ観測される物理的対象は一般的に存在しない，という主張の根拠が生まれてくるのである．測定装置に固定された対象の現われ方は，観測者の見方に依存する，というのである．

この主張は，あらゆる物理理論の内容は，ある測定と他の測定との関係を確立することである，という見解に立ったときにだけいくらか矛盾なくおし進めることができよう．しかし，あらゆる理論は現象自体の本質をついた仮説によってのみ発展し，それらの測定方法に関する仮説によってではないからこのような立場は，決して創造的ではない．

相対性理論の領域では，主観的な意味での相対性に固執する立場は，時空の新しい表象や概念の発展を遅らせることになった．たとえば，マッハの意味での一般相対性理論の実りない探索は（非一様な曲率をもつ4次元リーマン多様体理論としての）重力場の理論の発展に対応できなかったのである．

■第2章■

アインシュタインの要請とローレンツ変換

§5. アインシュタインの要請の役割とみかけ上の矛盾

時空の性質を反映するローレンツ変換は，最初ローレンツにより電磁場方程式の解析から得られた．つぎにアインシュタインは，相対性原理と光速度不変の原理の2つの要請からこれを導いた．アインシュタインはこの2つの要請をつぎのように定式化した．

1. 物理系の状態変化を記述する法則は，これら状態変化が互いに等速運動している2つの座標系のどちらに関係するかに依存しない．

2. あらゆる光線は，発光体が静止していようが運動していようが無関係に《慣性》系を一定速度 c で伝播する．

これらの要請が新しい時空理論の発展に及ぼした意義は，まず第一に，空間・時間は相互に有機的に関連していないという古い概念を否定したことにある．

相対性原理は，古典力学の基礎の上に作られたニュートン物理学にも含まれていたので，それ自体は何も絶対的に新しいものではなかった．この原理を任意の物理過程に拡張することに対して電磁気的・光学的エーテルの力学理論の立場からだけ異議がとなえられたと言える．

光速度不変の原理もまた，エーテル理論以前の概念と電磁気現象の領域へ戻ることを提案したにすぎない．つまり，空間と時間に対するニュートン力学の見地からしても，絶対的に容認し難い何かがある，というのではない．

だが，この2つの要請が同時に取りあげられたとき，それはニュートン力

学の空間と時間に対する具体的概念とは矛盾する結論を生み出した．普通，これはつぎのパラドックスの形で例示される．

いま基準系 Σ で，時刻 $t=0$ に原点 $x=y=z=0$ の光源が光を発したとしよう．光速度が一定であることから，時刻 t に光波の波面は，系 Σ の原点に

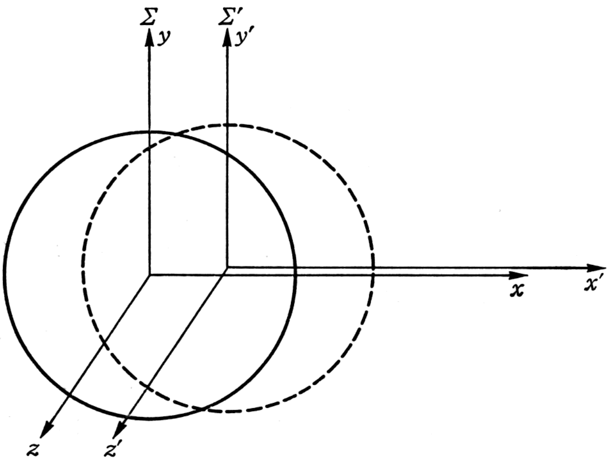


図 1

中心をもつ半径 $R=ct$ の球面に到達する．いま，同じ事象を x 軸にそって等速直線運動している基準系 Σ' から観測することにしよう．ここで，時刻 $t=0$ のとき基準系 Σ と Σ' は一致していたとする．系 Σ' においてもやはり，アインシュタインの要請にしたがって，時刻 t に光は半径 $R=ct$ の球まで到達する．ところがこの球の中心は系 Σ' の原点にある．これら2つの球の不一致，言いかえれば，同一の物理現象の不一致は，今までの概念からすれば，いかにもパラドックス的で受け入れ難いものである．このパラドックスの解決には，一見，光速度不変の要請もしくは2つの要請を同時に拒否しなければならないように思われる．

相対性理論は，まったく異なる解決の仕方を提案する．すなわち，基準系

Σ で同時の事象は，運動している他の系 Σ' では同時ではなく，その逆も言える．系 Σ で光の波面が球面

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{5.1}$$

に到達する事象は，系 Σ' から見ると同時ではない．同時なのは波面が球面

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \tag{5.2}$$

に到達する他の事象である．

このように，空間的に隔てられた事象の同時性は，日常生活での巨視的な経験で考えられるような絶対的なものではなく，基準系の選択と事象の間隔に関係してくる．この空間的に隔たった事象の**同時性の相対性**は空間と時間は相互に緊密な関連性をもつことを示している．なぜなら，物理的に等価な基準系のあいだの移行において，事象の時間間隔は空間の距離に依存するからである（ゼロの時間間隔が有限の空間間隔となり，その逆もありうる）．

このように，アインシュタインの要請から時間・空間の緊密な**相互連関**とそれらの不可分性という新しい基本的な命題に導かれる．この要請のもつ主要な意義は，まさにここにある．なぜなら，ローレンツ変換それ自体は，後でみるように，第1と第2の要請をそれぞれ適当に用いて，いろいろな方法で導き出せるからである．

光速度不変の要請に特別な意義を与え，それが相対性理論の主な内容であるかのように定式化する学者もいる．このような見解の主な論拠は，アインシュタインにより与えられた光の信号の特別の役割（この信号を用いて，空間的に隔てられた2つの事象の間の同時性が定義される）に発していると思われる．その際，つねに光速で伝播する光の信号は異なる基準系の時間のあいだに関連を与える道具と同一視される．そうなると，この光の信号なしには，空間的に隔たった2つの事象の間の同時性と時間の概念が，あたかも意味を失ってしまうかのようである．

相対性理論に対するこのような解釈の根拠が薄弱であることは，ローレンツ変換のつぎのような1つの可能な導き方を示すことにより，たやすく証明

できる．たとえば，相対性の要請を用い，光速度不変の要請の代わりに物体の質量が速度に依存するという仮定を用いるのである．

§6.　空間的に隔たった2つの事象の同時性に対する力学的定義

ローレンツ変換が，力学とそれに含まれる相対性原理だけを基礎にして導き出せることを示す前に，事象の同時性と時計の同期化（同時性を確かめること）は，光の信号を用いないで純粋に力学的な実験で確立できることを示そう．

空間的に隔てられた点にある同一の時計を光の信号を用いて同期化する1つの方法に，これらの点から等距離にある点（たとえば，2点間の中心）に置いた光のパルス源から到達するパルスを記録するやり方がある．光速度不変の要請より，パルス源から等距離だけ離れた点にはパルスが同時に到達するはずである．

この場合，信号が光速度 c で伝播する必要はなく同一の速度であることだけが重要である．だから，光のパルスは線分の中心から両端に向かって同一の等速度 u で運動する質点に置き換えてもよい．重要なことは，補足的な測定を行わないでもこれら質点の速度の同一性が保障される過程を実現することである．

2つの飛散する質点の質量が等しく，飛散の過程で運動量の一部をもち去るような第3の質点が現われなければ，運動量保存則によりこのような過程は実現可能である．このような，質点を対称的に飛散させる過程は数多く考えることができる．したがって，純粋に力学的な実験で空間的に隔たった時計の同期化は原理的に可能である．

ここで原理的な可能性ということを強調しておく．実際には，光の信号の利用はあらゆる場合により簡単で信頼できる．

いま述べた力学的方法によって時計を同期化すれば，空間的に隔たった事象に対してあらゆる基準系で等しい非相対的な真の同時性を示せる，と思わ

れるかもしれない．古典力学の法則と質量不変の法則が正しければ，実際そうなったであろう．ところが実際には実験が示すように，質量（運動量と速度の比として定義）は速度に依存し，速度が増加すると単調に増加する．それゆえ，運動量保存則は《静止》系で

$$\sum_k m_k \vec{u}_k = \vec{P} = \overrightarrow{\text{const.}} \tag{6.1}$$

の形をとる．また速度 $\vec{v}$ で動いている《運動》系では，

$$\sum_k m'_k \vec{u}'_k = \vec{P}' = \overrightarrow{\text{const}'}. \tag{6.2}$$

が成り立つ．式(6.1)の質量は，速度の単調増加関数であるから

$$m'_k \neq m_k. \tag{6.3}$$

(6.1), (6.2), (6.3) より，《静止》系では同じ質量の質点が等距離にある

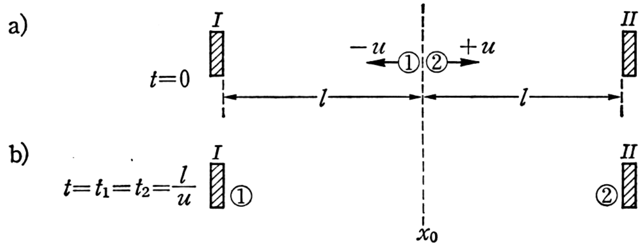


図　2

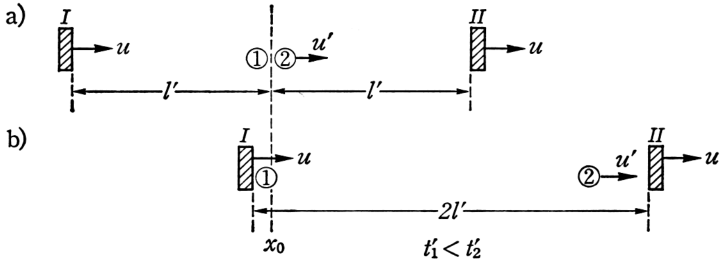


図　3

点へ到達する事象は同時であるが，運動している系から観測すれば同時ではないこと，を容易に示せる．

いま2個の同じ質量をもつ小球が，点 x_0 の時計で時刻 $t=0$ に，相互にしりぞけ合い，x_0 から等距離 l の点 x_1, x_2 にそれぞれ $-u$, u の速度で運動しはじめたとしよう（図2a）．2個の小球は時刻 $t=l/u$ に，2点 x_1, x_2 の障害物 I, II に到達する（図2b）．このように選ばれた系では，2球は最初の点から等距離離れた障害物に同時に到達する．

この過程を左方向に速度 $-u$ で動いている基準系 Σ' から観察しよう（図3a）．系 Σ' に対して障害物 I, II は右方向へ速度 u で動く．2小球も，互いにしりぞけ合うまではやはり右方へ速度 u で運動し，全運動量 $2m(u)u$ をもつ．系 Σ' の時計で $t'=0$ の瞬間に点 x_0 のそばを通過する2球は互いに反撥し合うとする．そうすれば，左球は速度 $-u$ を得て静止し，右球はある合成速度 u' を得る．これは運動量保存則より求められる．すなわち，

$$P'=2m(u)u=m(u')u'. \tag{6.4}$$

ゆえに，

$$u'=2u\frac{m(u)}{m(u')}. \tag{6.5}$$

このように，速度 u' は質量不変の古典力学から得られる $2u$ に等しくない．

系 Σ' で，障害物 I と II のあいだの距離を $2l'$ とする．この系の時計によれば，左球が障害物 I に（実際には障害物 I が静止している球①に），時刻

$$t_1'=\frac{l'}{u} \tag{6.6}$$

に到達する．右球は，距離 $2l'$ を飛んだ障害物 II に，時刻

$$t_2'=\frac{2l'}{u'}=\frac{2l'}{2u}\frac{m(u')}{m(u)}=t_1'\frac{m(u')}{m(u)} \tag{6.7}$$

に到達する．質量が速度の単調増加関数であるから，$u'>u$ のとき，

$$m(u')>m(u) \tag{6.8}$$

であり，したがって，(6.7) より，

$$t_2' > t_1' \tag{6.9}$$

が結論される．

こうして，力学の相対性原理は，空間的に隔たった事象の同時性の**相対性**（つまり，ある基準系で同時な（$t_1=t_2$）空間的に隔たった２つの事象が他の運動系では同時でない（$t_2'>t_1'$）ということ）を認める限り，質量が速度と共に単調増加するという事実と両立できる．

§7. 光速度不変の原理を用いないローレンツ変換の導き方

エーテル理論以前の古典物理学がもつ時間・空間の性質に関する《自然》な仮定だけに基づいて，ローレンツ変換を導き出そう．すなわち，古典力学の一般的概念だけを用いて，つぎの要請を公理とする．

1.　**空間の等方性**（すべての空間方向の同等性）

2.　**空間と時間の一様性**（空間・時間の性質が基準系の原点の選択に依存しないこと）

3.　**相対性原理**（すべての慣性基準系の完全な同等性）

種々の基準系は，同一の時間・空間を物質存在の普遍形式としてさまざまに表現する．おのおのの表現は同じ性質をもっているから，ある《静止》系 (x, y, z, t) の空間座標と時間ならびに別の《運動》系 (x', y', z', t') の空間座標と時間の間の関係を与える変換式は任意ではあり得ない．《自然》な要請が変換関数

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

に課す制限を求めてみよう．

Ⅰ．時間・空間の**一様性**から変換関数は**１次式**である．

実際，もし，x, y, z, t による f_1, f_2, f_3, f_4 の導関数が一定でなく，x, y, z, t

に依存すれば,《運動》系の点1と2のあいだの距離の射影 $x'_2-x'_1$, $y'_2-y'_1$, $z'_2-z'_1$, $t'_2-t'_1$ は対応する《静止》系の射影 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, t_2-t_1 のみならず, x, y, z, t 自体にも依存することになり, それは時間・空間の性質が原点の選び方に依存しないことという要請に矛盾する.

もし距離の射影

$$\xi'=x'_2-x'_1=f_1(x_2,\cdots)-f_1(x_1,\cdots) \tag{7.2}$$

が《静止》系での距離の射影

$$\xi=x_2-x_1 \tag{7.3}$$

だけに依存し, x_1 に依存しなければ,

$$\xi=\text{const.} \quad \text{のとき} \quad \frac{\partial\xi'}{\partial x_1}=0. \tag{7.4}$$

すなわち,

$$\frac{\partial f_1(x_1+\xi,\cdots)}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1(x_1,\cdots)}{\partial x_1}=0. \tag{7.5}$$

ゆえに,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\text{const.} \tag{7.6}$$

まったく同様に, 残りのすべての座標 y_1, z_1, t_1 による f_1 の導関数も一定であり, 一般に x, y, z, t による f_1, f_2, f_3, f_4 のすべての導関数は一定であることが示される. こうして, (7.1) の変換は線形である.

II. いま《運動》系 Σ' は初期時刻 $t=0$ に原点 $x'=y'=z'=0$ が《静止》系の原点 $x=y=z=0$ と一致し, x 軸方向にそって速度 v で運動するとしよう (図4).

ここで空間の一様性の要請を考慮すると, 上のように定められた基準系 Σ' の線形変換は

$$\begin{aligned} x'&=\kappa(v)(x-vt), \\ y'&=\lambda(v)y, \quad z'=\lambda(v)z, \\ t'&=\mu(v)t+\alpha(v)x \end{aligned} \tag{7.7}$$

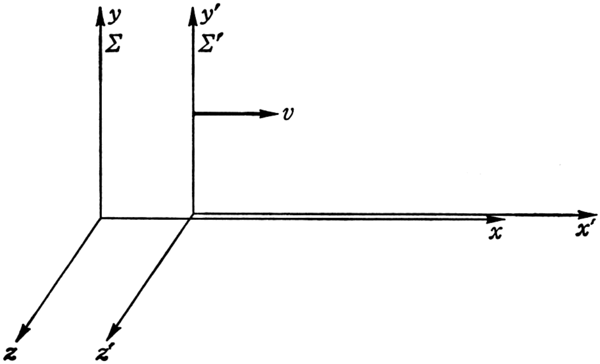


図 4

と書ける．ここで，空間の一様性と，問題の設定により運動がx軸方向であることを考慮すると，x'とt'の式にはy, zを含む項は現われない．まったく同じ理由で，y'とz'の式にはそれぞれzとyの比例項はなくyとzの係数は等しい．y'とz'の式で，xとtを含む項は，x'軸とx軸が一致していることから現われない．y'とz'がx, tに依存すれば，x'軸とx軸は一致しない．

Ⅲ．空間の**等方性**は，また空間の対称性をも仮定する．対称性により，vとxの符号を変えても（つまり，x軸の方向と系Σ'の運動方向を同時に変えても），変換式は変わらないはずである．

それゆえ，

$$
\begin{aligned}
-x' &= \kappa(-v)(-x+vt), \\
y' &= \lambda(-v)y, \quad z'=\lambda(-v)z, \\
t' &= \mu(-v)t-\alpha(-v)x.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

(7.7) と (7.8) を比較して，

$$
\begin{aligned}
&\kappa(-v)=\kappa(v), \quad \alpha(-v)=-\alpha(v), \\
&\mu(-v)=\mu(v), \quad \lambda(-v)=\lambda(v)
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

を得る．$\alpha(v)$ の代わりに，

$$\alpha(v)=-\frac{v}{\eta(v)}\mu(v) \tag{7.10}$$

を導入すると，(7.9) より，$\eta(v)$ は $\eta(-v)=\eta(v)$ を満たす偶関数である．(7.10) を用いて，(7.8) は，

$$\begin{aligned} &x'=\kappa(v)(x-vt)\,, \\ &y'=\lambda(v)y,\ \ z'=\lambda(v)z\,, \\ &t'=\mu(v)\left[t-\frac{v}{\eta(v)}x\right], \end{aligned} \tag{7.11}$$

と書ける．すべての係数 $\kappa(v), \lambda(v), \mu(v), \eta(v)$ は v に関する偶関数である．

Ⅳ．**相対性原理**より，《運動》系と《静止》系はまったく同等であるから，系 Σ' から系 Σ への逆変換は系 Σ から Σ' 系への変換と同一でなければならない．逆変換では，系 Σ' は系 Σ に対して速度 v で右方に運動し，系 Σ は系 Σ' の《静止》状態に対して $-v$ の速度で左方に運動するから，結局，速度 v の符号が逆になる．したがって逆変換は，

$$\begin{aligned} &x=\kappa(-v)[x'-(-v)t']\,, \\ &y=\lambda(-v)y',\ \ z=\lambda(-v)z'\,, \\ &t=\mu(-v)\left[t'-\frac{(-v)}{\eta(-v)}x'\right], \end{aligned} \tag{7.12}$$

となる．(7.12) と (7.11) を比較して，

$$\lambda(v)\cdot\lambda(-v)=1 \tag{7.13}$$

を得る．偶関数であることから $\lambda(-v)=\lambda(v)$ であり，したがって，

$$\lambda^2=1, \quad ゆえに, \quad \lambda=\pm 1\,.$$

負符号は $v=0$ のとき y, z 軸の反転を与えるから適さず，正符号をとる．結局，

$$\lambda=1\,. \tag{7.14}$$

係数 κ, μ, η も v の偶関数であることに注意すると，(7.11), (7.12) の最初と最後の式は，

$$\text{A)}\quad x'=\kappa(x-vt), \qquad \text{a)}\quad x=\kappa(x'+vt'),$$

$$\text{B)}\quad t'=\mu\left(t-\frac{vx}{\eta}\right), \qquad \text{b)}\quad t=\mu\left(t'+\frac{vx'}{\eta}\right),$$

と書ける．A) に μ を，B) に $v\kappa$ をかけ，辺々加えると，

$$\mu x'+v\kappa t'=\mu\kappa\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right)x.$$

ゆえに，

$$x=\frac{x'}{\kappa\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right)}+\frac{vt'}{\mu\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right)}.$$

これを a) と比較すると，

$$\kappa=\frac{1}{\kappa\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right)};\quad \kappa=\frac{1}{\mu\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right)}$$

を得る．これより，

$$\mu=\kappa;\quad \kappa^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{\eta}}. \tag{7. 15}$$

ここで根号を開き，負の符号は λ の場合と同様，物理的に無意味であることから，

$$\mu(v)=\kappa(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\eta}}} \tag{7. 16}$$

を得る．変換式を書くと，

$$x'=\kappa(v)(x-vt),\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'=\kappa(v)\left[t-\frac{vx}{\eta(v)}\right]. \tag{7. 17}$$

くわしく書くと，

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\eta(v)}}},\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'=\frac{t-\frac{vx}{\eta(v)}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\eta(v)}}}. \tag{7. 18}$$

ここで $\eta(v)$ は，いまのところ v の未知関数である．

V. $\eta(v)$ の形を決めるためにふたたび**相対性原理**を用いよう．明らかに，変換 (7. 17) は普遍的であり，基準系のあいだの任意の移行に適用できるはずである．それゆえ，系 Σ から系 Σ' へ，系 Σ' から系 Σ'' へと2度移行すれば系 Σ'' の空間座標と時間および系 Σ のそれとを結ぶ変換式もまた (7. 17) の形をとるはずである．相対性原理から導かれるこの要請は，可逆性，対称性などの要請とともに，変換は**群**を形成することを意味する．変換が群を形成するというこの要請を利用しよう．

v_1 は系 Σ に対する系 Σ' の速度であり，v_2 は系 Σ' に対する系 Σ'' の速度としよう．そうすれば，(7. 17) より，

$$x'=\kappa(v_1)(x-v_1t), \qquad x''=\kappa(v_2)(x'-v_2t'),$$

$$t'=\kappa(v_1)\left[t-\frac{v_1x}{\eta(v_1)}\right], \qquad t''=\kappa(v_2)\left[t'-\frac{v_2x'}{\eta(v_2)}\right].$$

x'', t'' を x, t で表わすと，

$$\begin{aligned} x''&=\kappa(v_2)\kappa(v_1)\left[x-v_1t-v_2\left\{t-\frac{v_1x}{\eta(v_1)}\right\}\right], \\ t''&=\kappa(v_2)\kappa(v_1)\left[t-\frac{v_1x}{\eta(v_1)}-\frac{v_2}{\eta(v_2)}(x-v_1t)\right]. \end{aligned} \tag{7. 19}$$

上述した要請により，この変換も (7. 17) の形に書ける．すなわち，

$$x''=\kappa(v_3)(x-v_3t), \quad t''=\kappa(v_3)\left[t-\frac{v_3x}{\eta(v_3)}\right]. \tag{7. 20}$$

(7. 20) で第1式の x の係数と第2式の t の係数は等しい．また，(7. 19) と (7. 20) が一致することから，(7. 19) の第1式の x の係数と第2式の t の係数は等しくなる．すなわち，

$$\kappa(v_2)\kappa(v_1)\left[1+\frac{v_1v_2}{\eta(v_1)}\right]=\kappa(v_1)\kappa(v_2)\left[1+\frac{v_2v_1}{\eta(v_2)}\right]. \tag{7. 21}$$

これより，

$$\eta(v_1)=\eta(v_2)=\text{const.} \tag{7. 22}$$

が得られる．

VI. さて，変換式 (7. 18) で η は速度の2乗のディメンションをもつ定数

である．この定数の値と符号は，実験事実に基づく新しい仮定の導入なしには決められない．

もし $\eta=\infty$ とおけば，変換式 (7.18) は，周知のガリレー変換

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t \tag{7.23}$$

に移行する．この変換式は，速度の小さい力学では正確であるが，速度の増加にともなって質量の変化が現われるような領域ではもはや正確ではない．

実際，§6 で示したように，速度による質量変化は隔たった2つの事象の間の同時性の相対性という仮定に必然的に導く．このことはガリレー変換 (7.23) と両立せず，したがって定数 η は有限である．

実験から，光速に近い大きな速度では，質点の力学方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u})=\vec{f}\,;\quad ただし\quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{7.24}$$

の形をとることが知られている．m_0 は粒子の固有（静止）質量であり，c は真空中の光速度 $3\cdot10^{10}$ cm/sec である．この実験事実は，質量を運動量と速度の比と定義すれば，質量の速度依存性として解釈できる．

(7.24) の定数 c^2 は，空間座標と時間の変換式 (7.18) の定数 η と同じディメンションをもつ．質量の速度依存を表わす実験式には，速度の2乗のディメンションをもつ定数はほかにないから，当然

$$\eta=c^2 \tag{7.25}$$

と置ける．(7.25) を用いると (7.18) は

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{7.26}$$

と表わされる．ポアンカレは，この空間座標と時間の変換式を**ローレンツ変換**と名づけた*)．

---

*) 1904年, H.A. ローレンツは，この変換をアインシュタインとポアンカレ以前に導いた．(7.26) の形は，ポアンカレによってはじめて与えられ，ローレンツ変換と名づけられた [5].

逆ローレンツ変換は変換の可逆性により，

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.27}$$

と書ける．

定数 η の決定の際に用いたディメンションの考えはまったく一意的だとはいえない．なぜなら (7.25) の代わりに，同等に，

$$\eta=-c^2 \tag{7.28}$$

と選べるからである．しかし，実験と合う力学方程式 (7.24) は，(7.26) のローレンツ変換からの結論としてのみ得られ，(7.28) の仮定からの変換式とは両立しないことがわかる．実際，ローレンツ変換に基づく力学方程式は，**ミンコフスキーの方程式***⁾であり，それによれば，質量は式 (7.24) にしたがって速度に依存することが知られている．もし，変換式として，

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t+\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.29}$$

を選ぶと，対応するミンコフスキー方程式は質量が速度の増加にともない減少し，実験と矛盾する．

こうして，真空中で光速度不変の要請や電気力学を引用せずに，また同時性の定義に光の信号の性質を用いないで，われわれはローレンツ変換を導いた．ここで用いたのは，時間・空間の一様性と等方性，相対性原理，および質量の速度依存式だけである．

普通，アインシュタインの最初の論文で紹介された方法，すなわち，質量の速度依存式の代わりに真空中での光速度不変の要請を用いる方法がよく知られている．この要請によれば，系 Σ から系 Σ' への移行に際して，方程式

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \tag{7.30}$$

---

*⁾ 詳しくは§14参照．

は不変である． この方程式は， 系 Σ の原点から伝播する光波の波面を記述する．また，方程式

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{7.31}$$

に変換式 (7.18) を代入すれば，容易に分るように，$\eta=c^2$ のときだけ (7.30) に移行し，その形を変えない．

ローレンツ変換が同期化のための信号の種類に依らないで導けることを示すために，ここでは光速度不変の要請を用いない方法を示した．こうして，光速度と電気力学についての知識がなくても，質量の速度依存性と力学的な相対性原理を解析すればローレンツ変換を導き出せるのである．

さて， ローレンツ変換 (7.26) は任意の物理過程に対して時間と空間の一般的性質を表現している．証明の途中で説明したように，これらの変換は**ローレンツ群**といわれる連続群を形成する．この事実にこそ，相対性理論によって明らかにされた時間・空間の性質が最も一般的な形で表現されている．

§8. 光速度不変の原理に基づくローレンツ変換の導き方

光速度不変の要請と時間・空間の一様性と等方性の《自然》な仮定に基づいて，ローレンツ変換を導くことも可能である．時計の同期化に用いられる光の信号の伝播速度の限界性こそが，理論の主要な内容であると主張したいときには，この導き方が優先される．この導き方の最初の部分は前の方法と変わらない．すなわち，まず一様性と等方性の《自然》な仮定から偶関数 $\kappa(v), \lambda(v), \mu(v), \eta(v)$ を係数とする線形変換 (7.11) を導く．さらに，両基準系での光速度不変の要請を定式化する．

光の信号の波面は原点から伝播するとすると，両基準系での波面の点としてつぎの 2 式を得る．

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0\,, \tag{8.1}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0\,. \tag{8.2}$$

(7.11) のダッシュをつけた座標を (8.2) に代入して，

$$(x-vt)^2\kappa^2+\lambda^2y^2+\lambda^2z^2-c^2\mu^2\left(t-\frac{v}{\eta}x\right)^2=0 \tag{8.3}$$

を得る．(8.3) と (8.1) が一致することから，

$$\kappa^2=\frac{\mu^2c^2}{\eta}, \qquad \kappa^2-\frac{\mu^2c^2v^2}{\eta^2}=\lambda^2,$$

$$(v^2\kappa^2-\mu^2c^2)=-\lambda^2c^2 \tag{8.4}$$

を得る．λ と μ を消去して，

$$1-\frac{v^2}{\eta}=\frac{\eta}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{\eta}\right). \tag{8.5}$$

それゆえ，$\eta=c^2$ または $\eta=v^2$ を得るが，$\eta=v^2$ は (8.4) の最初と最後の 2 式から $\lambda=0$ を与え，これは物理的に無意味である．したがって，

$$\eta=c^2. \tag{8.6}$$

(8.4) の最初と最後の式より，

$$\kappa^2=\mu^2=\frac{\lambda^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}. \tag{8.7}$$

こうして変換式 (7.11) は，

$$x'=\lambda(v)\frac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad y'=\lambda(v)y, \quad z'=\lambda(v)z,$$

$$t'=\lambda(v)\frac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{8.8}$$

と書ける．これらの変換式は，(7.26) のローレンツ変換とは係数 $\lambda(v)$ だけが異なる．$\lambda(v)\neq 1$ ならば，(8.7) により慣性系中にはある種の特別な系が存在することになる．それはたとえば，《静止》系 Σ から《運動》系 Σ' への移行に際して，y, z は λ 倍されるが，系 Σ' から系 Σ への移行に際しては λ 倍縮小されるという意味である．系 Σ が他の系と異ならないためには，

$$\lambda(v)\lambda(-v)=1, \quad \text{ゆえに} \quad \lambda^2=1 \tag{8.9}$$

が成り立たなければならない．特別な系がないことの要請は，実質的には相

対性の要請を意味している．こうして，ローレンツ変換の最終形 ($\lambda=1$) は，相対性原理の要請を用いてはじめて得られるのである．ここで示した導き方では，ローレンツ変換は相対性原理を適用しなくてもほぼ最終的な形が得られることから，相対性原理は二次的な役割しか果たしていないといえる．

ローレンツ変換の2つの導き方を比較すれば，相対性理論の内容は相対性原理や光信号の限界性にあるのではなく，理論の重要な結論は実質上すべて引き出せるローレンツ群の存在にあるという，われわれの主張の正しさが確認できる．

■第3章■

運動学的パラドックス

§9. ミンコフスキー平面上でのローレンツ変換の表示

ローレンツ変換からの最初の最も驚くべき結論は，運動しているものさしの運動方向への短縮と，運動している時計のあゆみの遅れである．時間・空間に対する日常の概念からすれば，これらの結論はいかにもパラドックス的である．

これらの運動学的現象に対する理解は，どうしても形式的にならざるを得ないが，(x, ct) 平面上でミンコフスキー4次元幾何学の規則にしたがって《静止》系の座標網と《運動》系の座標網を描くことによって与えられる．

(3.1) で定義された任意の2つの事象間の間隔 s_{12} は，ローレンツ変換に対して不変である．このことは，(7.26) を (3.2) に代入すれば，容易に確かめられる．第1の事象は時刻 $t=0$ に系 Σ の原点で起こるとし，空間座標と時間に対する対称的な記号

$$x_0=ct,\quad x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z \tag{9.1}$$

を導入する．そうすると，2つの事象の間隔は，

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=s^2 \tag{9.2}$$

と書ける．

この間隔 (9.2) の不変性に基づく4次元幾何学は，

$$R^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2 \tag{9.3}$$

で定義された距離 R の不変性に基づく通常のユークリッド幾何学，あるいは3次元ユークリッド幾何学を単に4次元的に拡張した ρ：

$$\rho^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \tag{9.4}$$

を不変とする幾何学とも本質的に異なる. (9.3) または (9.4) に基づくユークリッド幾何学では距離の2乗はつねに正値をとるから, 《距離》は実数である. 《距離》の類似である間隔 (9.2) に基づく4次元幾何学では, 間隔の2乗は正にも負にもゼロにもなりうる. それゆえ, この **《擬ユークリッド幾何学》** では間隔はそれぞれ**実数**にも**虚数**にもなりうる. 一致しない事象に対して**ゼロ**にもなりうる.

4次元ユークリッド幾何学と4次元擬ユークリッド幾何学のあいだの相異は, ミンコフスキーが提案したように, 時間は虚の第4座標に比例するとおけば見かけ上なくなる. つまり,

$$x_4=ix_0=ict \tag{9.5}$$

とおけば,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-s^2 \tag{9.6}$$

となり, これは (9.4) とは符号が異なるだけである. しかし, (9.6) は x_4

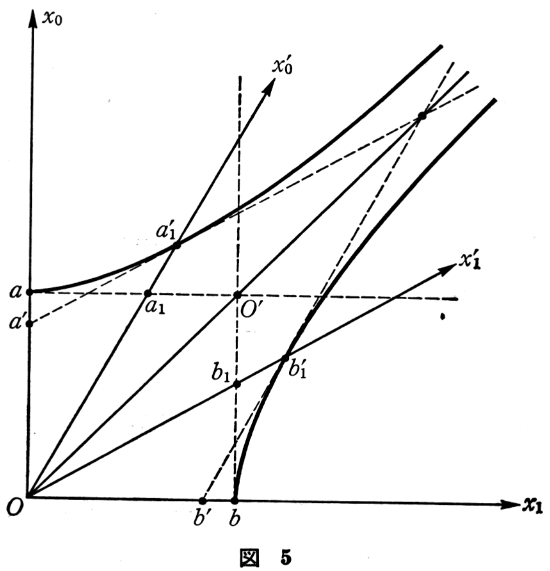


図 5

が虚数であるから，(9.2) と同様，符号が定まらず，(9.4) とは，やはり質的に異なる．

間隔の不変性により，事象の間の関係の質的相異は基準系の選択に依らない．すなわち，実数の**時間的**な間隔 s ($s^2>0$) はあらゆる基準系で実数であり，虚数の**空間的**な間隔 s ($s^2<0$) は，やはり基準系で虚数である．擬ユークリッド幾何学の，これらの特殊性は，ミンコフスキー平面 (x_1, x_0) 上にすべて明瞭に図解されている（図5参照）．

この平面上の線分 Oa と Ob は，それぞれ時間軸 x_0 と空間軸 x_1 の単位の目盛りを意味する．点 a から右方にのびる曲線は方程式

$$x_0^2-x_1^2=1 \tag{9.7}$$

で記述される双曲線であり，点 b から上方にのびる曲線は方程式

$$x_0^2-x_1^2=-1 \tag{9.8}$$

で表わされる双曲線である．このように，原点と点 a からの双曲線上のすべての点とは単位の時間的間隔で隔てられ，原点と点 b からの双曲線上のすべての点とは空間的間隔で隔てられている．また，点 a を通り x_1 軸と平行な点線は $x_0=1$ であり，点 b を通り x_0 軸に平行な点線は $x_1=1$ である．同じ平面上に引いてある直線 Oa_1' と Ob_1' は，それぞれ方程式 $x_1'=0$ と $x_0'=0$ を表わす．また，a', a_1' と b', b_1' を通る直線はそれぞれ $x_0'=1$, $x_1'=1$ を表わす．これらの直線は系 Σ' の座標網を表わしている．

図から明らかなように，系 Σ から系 Σ' への移行はミンコフスキー平面上で直交座標系から斜交座標系への移行に相当する．このことはローレンツ変換 (7.26) から直接，結論できるが，

$$x_1'=\frac{x_1-\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_0'=\frac{x_0-\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{9.9}$$

と書き変えるとわかりやすい．ただし，$\beta=\frac{v}{c}$．あるいは，

$$\begin{aligned} x_1'&=x_1\cosh\psi-x_0\sinh\psi \\ x_0'&=-x_1\sinh\psi+x_0\cosh\psi. \end{aligned} \tag{9.10}$$

ここで,

$$\cosh\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \sinh\psi=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

と置いた. 明らかに,

$$\cosh^2\psi-\sinh^2\psi=1$$

が成り立つ.

変換 (9. 10) はデカルト座標系から斜交座標系への移行と同一である. この変換において時間的ベクトル (原点から, 直線 OO' より上の領域内の点に引いたベクトル) は, ベクトルの端が双曲線上にあるから任意の座標系で時間的である. 同様に, 空間的ベクトルはすべての座標系で空間的である. 図5から明らかなように, 単位ベクトル Ob_1' の Ox_1' 軸上への《空間的》射影は1に等しく, Ox_1 軸上への射影は Ob' であり, 1より小さい. それゆえ, 系 Σ' で静止しているものさしは, 系 Σ での測定では短縮されて見える. この主張の逆も正しい. なぜなら, ベクトル Ob の Ox_1' 軸上への《空間的》射影は Ob_1 に等しく, それは系 Σ' の単位ベクトル Ob_1' より短いからである.

まったく同様なことは x_0 軸と x_0' 軸への《時間的》射影に対しても成り立つ. 系 Σ' で単位時間の過程を表わす線分 Oa_1' は系 Σ では Oa' に射影され, それは $Oa=1$ よりも短い時間の過程として観察される. したがって, 系 Σ' で静止している時計の歩みは, 系 Σ からの測定では遅れている. この現象に対して, やはり逆 (すなわち, 系 Σ で静止している時計の歩みは系 Σ' からの測定では遅れている) も正しいことは容易に確められる.

空間・時間の4次元射影の短縮というこれらの運動学的現象を, 図5を使わないでローレンツ変換とものさしで測られる空間, および時計で測られる時間という通常の概念だけを用いてもっと詳しく考察しよう.

§10. 運動しているものさしの短縮

静止しているものさしの長さは, いかなる時計も用いないで, ものさしの

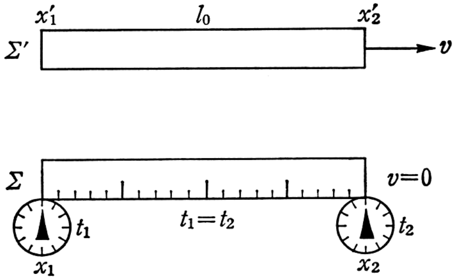


図 6

標準器を適用することによって測定できる．それに対して，運動しているものさしの長さを静止系で測定するには，ものさしの端が標準器上の点を通るときの同時性をしるす時計または信号を用いなくてはならない．このように，運動しているものさしの長さとは，静止している標準器によって同時刻に測定された両端間の距離である，と理解しなければならない．両端の位置の測定の**同時性**は本質的な必要条件である．容易に分かるように，この条件にしたがわなければ測定される長さはまったく任意となり，負やゼロにもなってしまう．

図6は，運動しているものさしの長さの測定図である．任意の座標系*⁾に置いた標準器を直接用いて得られる運動しているものさしの長さを$l_0=x'_2-x'_1=l'$としよう．この場合，ものさしの端が，固定された標準器上の点x_1, x_2を通る時刻t_1, t_2が等しければ（$t_1=t_2$），$l=x_2-x_1$は定義によって運動しているものさしの長さを与える．式(7.26)より，

$$l'=x'_2-x'_1=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.1}$$

を得る．$t_1=t_2$とおけば，

---

*⁾ 標準器による長さの測定は，ものさしの基準系間の移動とは無関係に同一の結果を与える操作と考える．この場合，もちろんものさしは《硬い》ものとする．

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (l'=l_0). \tag{10.2}$$

この結論がパラドックス的に見えるのは，相対性原理によって，系 Σ のものさしの長さを系 Σ' から測定するとまったく同様な式，すなわち，逆の関係

$$l_0=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{10.3}$$

が成り立つからである．これは，l_0, l も測定可能な量とすれば，明らかに(10.2)と矛盾する．この矛盾は，相対性が観測のすべての状況の完全な対称的変化を仮定すること，すなわち図6から図7に移ることを考慮すると解消できる．

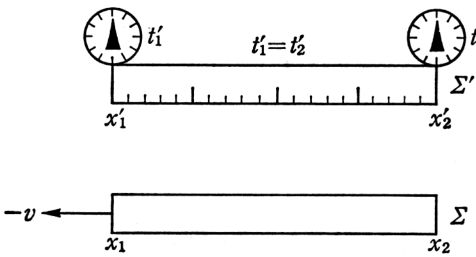


図 7

この説明図では，$t_1'=t_2'$ であるが，$t_1 \neq t_2$ であることに注意しよう．つまり図で，下側のものさしの端が，系 Σ の時計によって同時刻に記録されるのではなく，系 Σ' に配置された時計によって同時刻に記録されるのである．このとき，ローレンツの逆変換を用いると，

$$x_2-x_1=\frac{(x_2'-x_1')+v(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.4}$$

を得るが，$t_1'=t_2'$ であるから，

$$l'=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=l_0. \tag{10.5}$$

この式は系 Σ' での測定値 l が短縮されることを意味しているが，(10.5)の

l, l_0 の測定と (10.2) の測定の仕方は異なるから，もはや式 (10.2) とは矛盾しない．

それゆえ，ある基準系で同時な事象が他の系では同時ではないから，測定されるものさしの短縮あるいは伸張は，ものさしの端の位置の**同時な**測定がどの基準系で行なわれるかにのみ依存する．

§11. 運動している時計の遅れ

運動している時計の遅れは，図8による実験によって観測できる．速度 v で運動し時間 t' をきざむ時計は，時刻 t_1 に点 x_1 の傍を通り時刻 t_2 に点 x_2

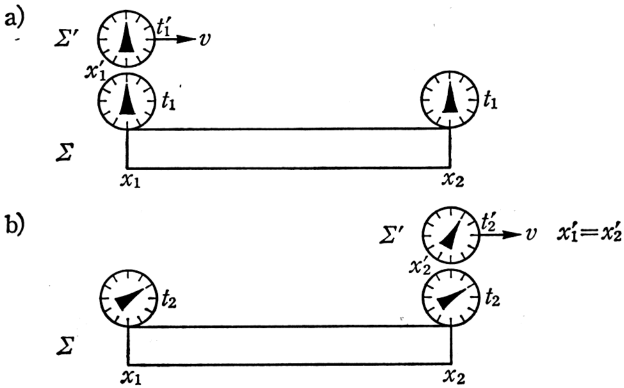


図 8

の傍を通過する．これらの時刻に，運動している時計とその傍に配置された固定された時計のそれぞれの指針の位置を比較するものとする*)．

いま，運動している時計の指針が，点 x_1 から点 x_2 までの運動で，時間 τ_0

---

*) 同一場所における事象の同時性は，信号とか特別な過程を用いないで，そのままの意味で定義される．系 Σ の異なる点 x_1 と x_2 における時計の同時性は，光の信号を用いるか，あるいは§6で考察したような手続きを用いて定義されるとする．

を記録し，固定系 Σ で，あらかじめ同期化された時計1と2の指針は時間 τ を記録したとしよう．そうすると，

$$\tau'=\tau_0=t'_2-t'_1, \quad \tau=t_2-t_1. \tag{11.1}$$

ローレンツの逆変換 (7.27) から，

$$t_2-t_1=\frac{(t'_2-t'_1)+\frac{v}{c^2}(x'_2-x'_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.2}$$

を得る．(11.1) を (11.2) に代入して，運動している時計は，運動系ではつねに静止しており，

$$x'_1=x'_2 \tag{11.3}$$

であることに注意すると，

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\tau_0=\tau') \tag{11.4}$$

を得る．

この式は，静止している時計がきざむ時間は運動している時計が記録する

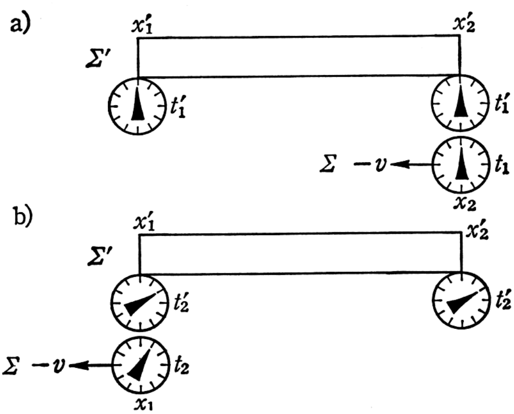


図 9

時間よりも大きいことを意味している．言いかえれば，《運動》している時計の歩みは《静止》している時計の歩みよりも遅れるのである．

式(11.4)についても，ものさしの場合の(10.2)と同様に逆のことがいえる．しかし，逆の関係式を，

$$\tau_0=\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.5}$$

と書くとき，$\tau_0=t_2'-t_1'$ と $\tau=t_2-t_1$ は図8の実験によって与えられるのではなく，図9の実験によって測定される量であることに注意しなければならない．実際，ローレンツ変換によれば，

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.6}$$

であり，条件

$$x_2=x_1 \tag{11.7}$$

を考慮すれば式(11.5)が得られる．

こうして得られた時計の遅れは，実在する現象*)であり，それは運動学的な性格をもつ．たとえば，図8の実験で，時計2が《運動》する時計よりも早く進んだという結果は，《運動》系 Σ' の立場からは，時計2は最初から時計1と同期に進んだのではなく，それに先んじていたから（運動系で同時な，隔たった事象が他の系では非同時であることによる）として説明できる．

こうして，運動している時計の遅れと，運動しているものさしの短縮は，「空間的に隔たった事象の同時性の相対性」という考えを理解してしまえばもはやパラドックスではなくなる．

---

*) 実際，高速の不安定粒子（たとえばミュー粒子）は，静止しているときよりも長い半減期をもっている．

§12. 時計のパラドックス

多くの論争と誤解をもたらした，もっと驚くべきパラドックスは，いわゆる《時計のパラドックス》であろう．いま静止慣性系 Σ の点 I に時計 A が存在するとする．またそれと同じ時計 B がはじめに点 I に存在し，それから

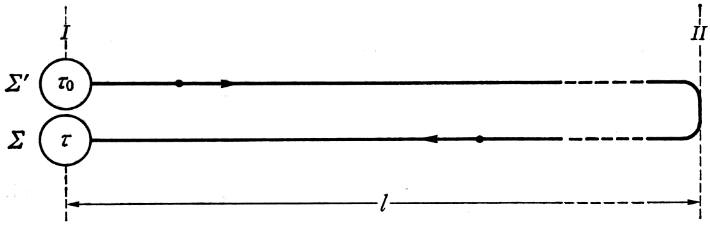


図 10

速度 v で点 II に向かって運動し，点 II までの行程 l を通過した後時計 B は速度を落とし，それから逆向きの速度 $-v$ まで加速され，点 I まで戻ってくるとしよう（図 10）．

時計 B の速度が逆方向に変化するときに要する時間が，点 I から点 II までの等速直線運動に要した時間に比較して十分小さいとすれば，時計 A によって記録された時間 τ と時計 B によって記録された時間 τ_0 は，(11.4) より，それぞれ

$$\tau=\frac{2l}{v}, \quad \tau_0=\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\delta \tag{12.1}$$

で与えられる．ただし，δ は時計 B の加速運動中の時間の小さな補正である．それゆえ，時計 B は点 I に戻ってきたとき**実際に**時計 A に比較して，

$$\varDelta\tau=\tau-\tau_0=2\frac{l}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)-\delta \tag{12.2}$$

だけ遅れる．距離 l は任意に大きくとれるから，補正 δ は第1項に比べて無視できる．

ローレンツ変換のこのような運動学的帰結の特殊性は，ここで，運動している時計の歩みの遅れは**実在の効果**であり，前節のように測定手順の選択の結果によるものではない，ことにある．系 Σ' でのすべての過程が，系 Σ で起こる過程よりも実際に遅れるということである．だから，時計 B といっしょに存在する生物器官の生物学的過程も遅れるはずである．系 Σ' 中を旅行している人間の組織の生理的過程も，やはりゆるやかに起こり，その結果，系 Σ' での有機体は点 I に戻ってきたとき系 Σ の有機体よりも若いことになる．

ある時計が他の時計よりも**実際**に遅れるということはパラドックス的に思われる．相対性原理によれば，系 Σ と Σ' のどちらを静止系として選んでもよいのだから，このことは相対性原理そのものに矛盾するように思われる．つまり，われわれの選択の仕方によって，実際に遅れている時計は時計 A にも B にもなり得ることになる．だが時計 B は A よりも実際に遅れているから明らかにそのようなことは不合理である．

このような議論の誤りは系 Σ と系 Σ' が物理的に等価でないことから起こる．系 Σ はいつも慣性的であるが，系 Σ' はその速度が逆になるある時間の間，非慣性的である．加速されるあいだ時計のあゆみは慣性重力場によって強く変化するので，系 Σ' に対する式 (12.1) の第2式は正しくない．

しかし，このような正しい説明を与えても，なお非常に不思議に思われる．なぜなら，2つの系は長い時間互いに等速直線運動をしているからである．それゆえ，系 Σ' から観測すれば，系 Σ の時計 A は (12.1) 式にしたがって遅れる．そして系 Σ' に慣性力が働くごく短い時間に，式 (12.2) で与えられる $\Delta\tau$ の2倍の時間だけ急に進んでしまうのである．そのとき系 Σ' の受ける加速度が大きければ大きいほど時計 A における時間は速く流れる．

このような結論の本質は，ミンコフスキー平面上で明瞭に図解できる．図11で，線分 Ob は静止している時計を表わし，折線 Oab は運動している時計 B を示している．点 a には時計 B の系を加速しその速度を逆方向に変える

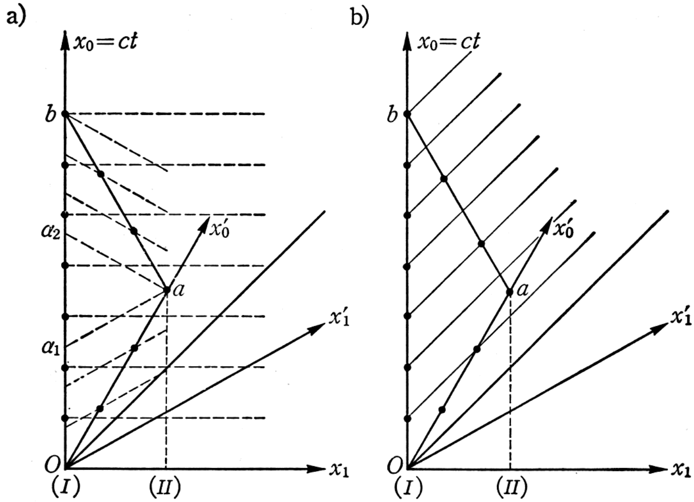


図 11

力が働いている．軸 Ob 上に配列された点は，時計 A と結びついた静止系の時間を単位間隔に分けている．

また折線 Oab 上の点は，時計 B による時間を等しい単位時間の間隔に分けている．図からわかるように，直線 Ob 上の単位線分の数は，（系 Σ' に対応する）折線 Oab 上のそれよりも多い．それゆえ，時計 B は時計 A よりも遅れる．

図によれば，《静止》している時計 A は点 a の時刻までは時計 B よりも遅れている．この時刻と同時であるのは時刻 α_1 であるが，その時までは時計 B はまだ速度 v で運動している．しかし，時計 B が減速され，速度が $-v$ になるまでの短い時間は時計 B ではほとんど時刻 a とみなされるが，系 Σ でこれと同時であるのは時刻 α_2 である．つまり，ほとんど瞬間的に系 Σ の時間は有限な間隔 $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ だけ飛躍する．

しかし，この時間の飛躍は現実に測定可能な効果ではない．実際，もし系 Σ から系 Σ' に単位間隔をおいて規則的に光の信号を送るとすれば，この系

には，最初はまれに，そして速度が逆方向になってからはより頻繁に，というようにまったく規則正しく光の信号がやってくるだろう．こうして，図11bから分かるように系 Σ' の時計 A の示度にはどんな断続性も観測されない．

結局，《時計のパラドックス》は，日常の時間・空間の概念からはなじみにくい4次元擬ユークリッド幾何学の時空多様体が与える結論にすぎない．

§13.　4次元速度と3次元速度

4次元ミンコフスキー空間で等速直線運動をしている質点は，もちろん直線で表わされる．ミンコフスキーの用語によれば，質点の運動を表わす直線は**世界線**と呼ばれる．等速直線運動をしていない質点は，曲線で表わされる．このような運動は，各点での世界線の接線方向によって特徴づけられる．接線方向は，

$$\frac{dx_k}{ds} \qquad (k=0,1,2,3) \tag{13.1}$$

の成分をもつ4元ベクトルで定義される．ここで，

$$(ds)^2=(dx_0)^2-(dx_1)^2-(dx_2)^2-(dx_3)^2 \tag{13.2}$$

は4次元の不変量である間隔要素の2乗である．ミンコフスキーの用語にしたがって，このベクトルは**世界接線**のベクトルと名づける．

世界接線のベクトルの成分は，

$$\frac{dx_k}{ds}=\frac{dx_k}{dx_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{dx_1}{dx_0}\right)^2-\left(\dfrac{dx_2}{dx_0}\right)^2-\left(\dfrac{dx_3}{dx_0}\right)^2}}=\frac{\dfrac{1}{c}\dfrac{dx_k}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{13.3}$$

と書ける．したがって，このベクトルはつぎの4つの成分をもつ．

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},\quad \frac{\dfrac{u_x}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},\quad \frac{\dfrac{u_y}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},\quad \frac{\dfrac{u_z}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}. \tag{13.4}$$

$u \ll c$ の極限では，このベクトルの第ゼロ成分は1であり，第1，第2，第3の各成分は3次元ベクトル $\vec{u}/c$ を成す．それゆえ，(13.3) の4次元ベクトルに c をかけたものは，通常の3次元速度 $\vec{u}$ の4次元的拡張とみなせる．すなわち，

$$U_k = c\frac{dx_k}{ds} = \frac{dx_k}{dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{dx_k}{d\tau}. \tag{13.5}$$

ただし，

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{13.6}$$

ここで $d\tau$ は質点といっしょに運動している時計によって，(11.4) にしたがって測定される《**固有時間**》の要素である．

4次元ベクトル U_k の長さは，(13.2) と (13.5) より明らかに，

$$U_kU_k = U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = c^2 \tag{13.7}$$

に等しい*)．

4次元擬ユークリッド幾何学においては，世界接線のベクトル (13.5) のみが，3次元速度の拡張である共変的な物理量の**4次元速度**と考えられる．通常の速度 $\vec{u}$ は，ローレンツ変換に対して4次元的に変換される共変的な物理量ではない．

ローレンツ変換が，ガリレー変換に移行する極限 ($u \ll c$) においては，ベクトル $\vec{u}$ はガリレー変換と空間座標軸の回転に対して共変的な，物理的に正しく導入された量となる．

4次元ベクトル U_k の成分は，任意の4次元ベクトルがそうであるように，速度 v で運動する基準系への移行に際して，成分 dx_k**) と同様にローレン

---

*) 今後，2度繰り返される添字については総和の規則を適用する．たとえば2つの4次元ベクトルのスカラー積は，$A_kB_k = \sum_{k=0}^{3} \varepsilon_k A_k B_k = A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3$ と書かれる．ただし，$\varepsilon_0 = 1$，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$．

**) ここでは，共変ベクトルと反変ベクトルの変換の相異は現われないからこれらのベクトルは特に区別しない．

ツ変換にしたがって変換される（(9.9) 参照).

$$U_1'=\frac{U_1-\beta U_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad U_2'=U_2,\quad U_3'=U_3,\quad U_0'=\frac{U_0-\beta U_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\qquad (13.8)$$

ただし $\beta=\frac{v}{c}$. ここで4次元速度ベクトルの《長さ》は一定であり c に等しい.

4次元速度を導入したように4次元加速度を,

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2}=\frac{dU_k}{d\tau}\qquad (13.9)$$

と定義する. $v\ll c$ の極限では, 4次元加速度ベクトルの3つの空間成分は3次元加速度の成分と一致する.

(13.7) によれば,

$$U_k\frac{dU_k}{d\tau}=0\qquad (13.10)$$

が成り立つ. すなわち, 4次元加速度ベクトルは4次元速度ベクトルとつねに直交する. 4次元加速度ベクトルの成分もやはり式 (13.8) によって変換される.

任意のベクトル A_k に対してはこれらの公式は

$$A_k'=a_{k\alpha}A_\alpha\qquad (13.11)$$

の形で表わされる. ここで行列 $\|a_{ik}\|$ は,

$$\|a_{ik}\|=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0\\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\qquad (13.12)$$

で与えられる.

式 (13.8), (13.12) による4次元速度ベクトルや他の4次元ベクトルの変換から導かれる結論は, 空間座標と時間のローレンツ変換から導かれた帰結ほどパラドックス的ではない. いくつかの新しい予期しなかった結論が, 4

次元ベクトルから，3次元速度ベクトル $\vec{u}$ のような3次元ベクトルに戻るときに現われる．

任意の4次元ベクトル A_k は，成分 A_1, A_2, A_3 より成る3次元ベクトル $\vec{A}$ と第ゼロ成分 A_0 より成り，

$$(A_0, \vec{A}) = (A_0, A_1, A_2, A_3) \tag{13.13}$$

と表わされる．この記述法と式(13.4),(13.5)に依れば4次元速度ベクトルは，

$$(U_0, \vec{U}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) \tag{13.14}$$

と書ける．

それゆえ，古典物理学で知られている操作によって測定される通常の3次元速度ベクトル $\vec{u}$ は，4次元速度ベクトルの成分を用いて，

$$\vec{u} = c\frac{\vec{U}}{U_0} \tag{13.15}$$

と書ける．

この式と(13.8)の変換式を用いると，運動系 Σ' での速度ベクトル $\vec{u}$ の成分に対するつぎの式が容易に得られる．

$$\begin{aligned} u'_x &= c\frac{U'_1}{U'_0} = c\frac{U_1 - \frac{v}{c}U_0}{U_0 - \frac{v}{c}U_1} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_y &= c\frac{U'_2}{U'_0} = c\frac{U_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{U_0 - \frac{v}{c}U_1} = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_z &= c\frac{U'_3}{U'_0} = c\frac{U_3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{U_0 - \frac{v}{c}U_1} = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}. \end{aligned} \tag{13.16}$$

こうして，いわゆる**速度の合成則**の公式を得た．これらの式の可逆性を証明

するのはむつかしくない．すなわち，

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}},\quad u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}},\quad u_z=\frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}. \tag{13.17}$$

ここから，もし最初の系で物体の速度が光速度 c を超えないならば，慣性系のあいだの移行によって，c を超える物体の速度は得られないことが示せる．

実際，式(13.17)によれば3次元速度 $\vec{u}$ の2乗は

$$\vec{u}'^2=u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z=\frac{(u_x-v)^2+(u_y^2+u_z^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \tag{13.18}$$

と変換できる．この式の両辺から c^2 を引けば，簡単な変形ののち，

$$u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z-c^2=(u_x^2+u_y^2+u_z^2-c^2)\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \tag{13.19}$$

を得る．$v>c$ の場合，（ローレンツ変換において）ダッシュをつけた座標は虚数となるからローレンツ変換は明らかに $v<c$ のときのみ物理的な意味をもつ．それゆえ，最初の系に対して光速度を超えない速度*) で運動している基準系だけが物理的な意味をもつ．それゆえ，式(13.19)の右辺の因数は，

$$\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}>0 \tag{13.20}$$

とつねに正である．このことと(13.19)より，

$$\vec{u}^2-c^2 \tag{13.21}$$

は慣性系のあいだの任意の移行に対してその符号を変えない．したがって，

---

*) これは基準系の速度であり，c を超える可能性のある物理的な過程に対するものではないことを強調しておく．

任意の基準系に対して，つぎのことがいえる．

$$
\begin{aligned}
&\text{もし，}\vec{u}^2<c^2\text{ なら，}\vec{u}'^2<c^2,\\
&\text{もし，}\vec{u}^2=c^2\text{ なら，}\vec{u}'^2=c^2,\\
&\text{もし，}\vec{u}^2>c^2\text{ なら，}\vec{u}'^2>c^2.
\end{aligned}
\qquad (13.22)
$$

言いかえれば，光速度以下の速度（$u<c$）の任意の物理過程は，あらゆる慣性系で光速度以下であり，超光速の速度（$u>c$）はつねに超光速である．また光速で伝播する過程は任意の基準系で光速に等しく，これは真空中での光速度不変の要請と合致する．

■第4章■

相対論的力学のパラドックス

§14. 質点の力学

質点の力学の相対論的な共変方程式は，ニュートンの方程式ではなく，ミンコフスキーの方程式である．これは3次元の速度と加速度を4次元のそれに置き換えて得られ，ニュートンの方程式の自然な拡張である．このような置き換えはニュートン力学と矛盾しない．なぜなら，ニュートン力学が適用されるような速度では，4次元の速度と加速度の最初の3つの成分は，3次元の速度と加速度の成分と一致するからである．

こうして**ミンコフスキーの方程式**は，

$$M\frac{d^2x_k}{d\tau^2}=F_k \tag{14.1}$$

と表わされる．あるいは，

$$M\frac{dU_k}{d\tau}=F_k. \tag{14.2}$$

ここでMは，ニュートン力学における質量の自然な拡張である，4次元不変量の固有質量である．F_kは3次元の力$\vec{f}$の拡張である，4次元の力である．4次元運動量ベクトル

$$P_k=MU_k \tag{14.3}$$

を導入すると，ミンコフスキー方程式は，

$$\frac{dP_k}{d\tau}=F_k \tag{14.4}$$

と書ける．

ミンコフスキー方程式の第ゼロ成分と4次元運動量の第ゼロ成分の物理的な意味を明らかにし，また通常の3次元の物理量とのあいだに関係を見い出すために，ミンコフスキーの方程式を（非共変的な）3次元形式で書き下そう．

4次元速度と4次元加速度の直交性を考慮しよう．すなわち，条件(13.10)と方程式(14.2)より，

$$F_k U_k = 0 \tag{14.5}$$

を得る．これは(13.14)の表し方を用いると，

$$F_0 U_0 - \vec{F}\vec{U} = 0. \tag{14.6}$$

さらに

$$m = \frac{M}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, \tag{14.7}$$

$$\vec{f} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\vec{F} \tag{14.8}$$

(13.6) (13.14) より
と置くと(14.6)より，(14.2)はつぎのように書ける．

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{f}, \quad \frac{d}{dt}(mc^2) = (\vec{u}\vec{f}). \tag{14.9}$$

$u \ll c$ の極限では，第1式はニュートンの（3次元ベクトルの）方程式

$$\frac{d}{dt}(M\vec{u}) = M\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} \tag{14.10}$$

にほかならず，また，第2式はエネルギーの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Mu^2}{2}\right) = (\vec{u}\vec{f}) \tag{14.11}$$

となる．$u \ll c$ であることから，

$$mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = Mc^2 + \frac{Mu^2}{2} + \cdots \tag{14.12}$$

が成り立つからである．

このようにして4次元運動量の最初の3成分は3次元運動量の拡張であ

り，第ゼロ成分は一般化したエネルギーを光速度で割った量という意味をもつことがわかる．それゆえ，

$$\vec{P}=M\vec{U}=m\vec{u}=\frac{M\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\vec{u}E}{c^2},$$
$$P_0=MU_0=mc=\frac{Mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{E}{c}. \tag{14.13}$$

4次元の相対論的力学では，$\vec{P}$ を質点の**運動量**，E を質点の**エネルギー**という．(14.7) で定義される m は，ニュートンの方程式に現われる慣性質量と同様に，運動方程式 (14.9) に現われるから**慣性質量**といわれる．m が速度に依存することをはっきりさせるために**運動質量**ともいう．

(14.13) によれば，エネルギーは，

$$E=mc^2 \tag{14.14}$$

あるいは，

$$E=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{14.15}$$

と表わされる．こうして，有名な**アインシュタインの関係式**が導かれた．この関係式はしばしば，質量とエネルギーの等価性の表現，あるいは《エネルギー慣性の法則》と，解釈されている．

時空の4次元幾何学の立場からすると，4次元の共変的な量だけが真の物理的な意味をもちうる．質点の力学ではそのような量として，4次元スカラーである固有質量 M，4次元速度ベクトル U_k，加速度 $\frac{dU_k}{d\tau}$，力 F_k，運動量 P_k をあげることができる．エネルギー E は，4次元理論においては3次元のニュートン力学と異なり，それだけでは物理的な意味をもち得ない．4次元理論ではエネルギー E は，4次元運動量 P_k の第ゼロ成分に c をかけたものに等しく ($E=cP_0$)，運動量のベクトル部分 $\vec{P}$ といっしょにしてはじめて共変的な物理的意味をもつ．(14.3) と (13.7) によれば，

$$P_kP_k=M^2U_kU_k=M^2c^2 \tag{14.16}$$

であるから4次元の立場では，固有質量は4次元運動量の《絶対長さ（絶対値)》に比例する量にすぎない．(14.16) は，

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-\vec{P}^2=M^2c^2 \tag{14.17}$$

とも書ける．関係式 (14.17) は4次元運動量ベクトルによる，共変的な固有質量の定義とみなせる．

結局，4次元幾何学の立場からは，運動量 $\vec{P}$ とエネルギーを光速度で割ったもの（$P_0=E/c$）は，（1つの物理量である）4次元運動量ベクトルの成分を成す．このベクトルの不変的な《長さ（絶対値)》は粒子の固有質量に光速度 c をかけたものに等しい．

§15. 質量とエネルギーの等価性の意味

通常，アインシュタインの関係式 (14.14) には深い物理的な意味が与えられている．それは質量とエネルギーの等価性の表現と解釈されている．そのような解釈は (14.7) で定義される m を慣性質量の概念の相対論的拡張とみなせば必然的なものとなる．このとき，(14.14) は相対論的エネルギーが相対論的慣性質量に比例することを表わす．関係式 (14.14) は普遍的であるから，すべての法則において E は m に置き換えられ，その逆も可能である．このことは質量とエネルギーが，定数 c^2 の換算率で等価であることは表わしており，この定数は，単位を適当に選ぶことによって1に等しくできる．

もし関係式 (14.14) に上に述べたような意味を与えるとすれば，これを相対論的共変な関係式と考えなければならない．しかし4次元的な立場からは，エネルギー E は4次元ベクトル

$$E_k=cP_k \tag{15.1}$$

の第ゼロ成分である．それゆえ，m は不変量と考えるのではなく，4次元ベクトル m_k

$$m_k=\frac{P_k}{c} \tag{15.2}$$

の第ゼロ成分とみなさなければならない．したがって，関係式(14.14)を方程式(14.9)に現われる量によるエネルギーの定義とみなさないで，なにか新しい物理的な主張を意味するものとみなせば，それは，(14.14)を

$$E_k=m_kc^2 \tag{15.3}$$

と書き，ベクトル E_k と m_k に独立な物理的意味を与えたときにだけ意味をもってくる．

明らかに，慣性質量 m に対する式(14.7)は，m を，M と U_k で表わした4次元の量 m_k

$$m_k=\frac{MU_k}{c} \tag{15.4}$$

の第ゼロ成分と考えるときにだけ共変的な意味をもってくる．

また，

$$(m-M)c^2=Mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right) \tag{15.5}$$

で与えられる《**運動エネルギー**》のような概念は，4次元の共変的な意味はさらさらない．たしかにこれは，$u \ll c$ の極限で古典的な運動エネルギー $\frac{1}{2}Mu^2$ と一致する．だが(15.5)の第1項は，4次元ベクトルの第ゼロ成分であり，第2項は4次元スカラーである．明らかにベクトルとスカラーのこのような《組み合わせ》は，光速度に近い領域の現象を取り扱うとき，共変的に導入できる物理量とはみなせない．$u \ll c$ の極限においてのみ，《運動エネルギー》は3次元スカラーとして意味をもちうる．

式(14.7)，(14.14)，(14.15)，(15.5)で定義される量および方程式(14.9)は，4次元表示から(固定基準系と結びついている)3次元表示への移行に際してのみ一定の物理的意味をもつ．つまり，相対性原理と時空の4次元的性格を無視したときのみである．このようなことは，$u \ll c$ の極限の場合あるい

は厳密な4次元理論を古典物理学のわかりやすい3次元表示による《代用》で記述するときにだけ正当化されるものである．実際，相対論的共変性を無視して唯一の基準系に対する理論をつくるとすれば，相対論的効果は通常の力学方程式（14.9）に現われる《慣性質量》が，（14.7）の《法則》によって速度に依存するという事実を考慮することで表現できるだろう．そのとき，4次元運動量の第ゼロ成分に c をかけたものとしてのエネルギー E の定義は，《エネルギー慣性の法則》と理解することができよう．

3次元の非共変的定式化においてだけ正当化される，《法則》と称するものを相対論的な4次元の立場から理解し解釈しようとすることから多くの誤解とパドラックスが生じる．

4次元理論には，速度に依存するスカラー量の慣性質量の概念はない．あるのは運動量とエネルギーとに不可分に結びついている固有質量 M の概念だけである．したがって，《慣性質量の速度依存法則》は，慣性質量の概念を（15.4）の形に拡張したときにはじめて4次元理論に含めることができる．しかし，このような拡張は（15.4）の質量ベクトル m_k が定数 $1/c$ を除けば4次元運動量ベクトル P_k となにも変わりないから人為的で不自然である．

同様なことはアインシュタインの関係式 $E=mc^2$ についてもいえる．3次元の立場からは，たしかにこれは法則である．この関係式は，運動を特徴づける量と物体の慣性度を表わす量の，2つの質的に異なる物理量を結びつけるものだからである．4次元の立場からは，（15.3）の形で書き表わされるときにだけ意味をもちうる．しかし，この場合その意味は，質量ベクトル m_k のエネルギーベクトル E_k による定義式の水準にまでひき下げられてしまう．しかも，これら2つのベクトルは，直接の物理的意味をもつ運動量ベクトル P_k をとおしてはじめて，物理的に定義される．

アインシュタインの関係式（14.14）には（15.3）とは異なる，別の共変的な意味を与えることができる．この関係式が原子力の分野などで応用されるのは，その別の意味でである．この問題は次節の質点系のエネルギー・運動量

保存則のところで明らかにする.

§16. エネルギー・運動量と全固有質量の保存則

非相対論的力学では，エネルギーの保存則は（N 個の粒子より成る）質点系の力学方程式

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u}_k)=\vec{f}_k, \quad (k=1, \cdots, N) \tag{16.1}$$

からの帰結として導かれる．また条件

$$\sum_k \vec{f}_k=0 \tag{16.2}$$

が成り立てば，(16.1) から運動量保存則も導かれる.

相対論的力学では，相互作用の遅れを無視することはできないので，作用・反作用の法則を表わしている条件 (16.2) は，もはや成り立たない．しかし，質点粒子とこれら粒子間の相互作用の場を含む系に対する保存則は微分形式で表わされた一般的なエネルギー・運動量保存則

$$\frac{\partial T_{k\alpha}}{\partial x_\alpha}=0 \tag{16.3}$$

の帰結として導き出せる．ここで $T_{k\alpha}$ はエネルギー・運動量の4次元テンソルである．この方程式の導出は，場の理論においてだけ詳細に取り扱える問題であるから，ここではその導き方にはふれないでエネルギー・運動量保存則そのものの解析にだけ限定する.

k 番目の粒子の4次元運動量を $\left(\frac{e_k}{c}, \vec{p}_k\right)$，すべての場の4次元運動量を $\left(\frac{e^{(f)}}{c}, \vec{p}^{(f)}\right)$ で表わす．場と粒子の孤立系に対しては，全体の4次元運動量 $\left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$ の保存則が成り立つから N 個の粒子から成る系に対しては,

$$\begin{aligned} \vec{P}&=\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k+\vec{p}^{(f)}, \\ E&=\sum_{k=1}^{N} e_k+e^{(f)} \end{aligned} \tag{16.4}$$

は保存される．したがって，(14.17) より，系全体の固有質量

$$M=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2-\vec{P}^2} \tag{16.5}$$

もまた保存される．

こうして，相対性理論においては，3次元の運動量とエネルギーおよび質量の保存則は，4次元運動量の統一的なエネルギー・運動量保存則として統合される．重心系においては，

$$\vec{P}=0 \tag{16.6}$$

であるから，全固有質量の保存則はエネルギー保存則と(定数 c^2 の換算率で)一致する．この重心系においては

$$M=\frac{E_0}{c^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{\sqrt{1-\beta_k^2}}+\frac{e^{(f)}}{c^2} \tag{16.7}$$

である．粒子の速度が光速度にくらべて十分小さいとき，場のエネルギー $e^{(f)}$ は粒子間の対相互作用のエネルギー，すなわち，系のポテンシャルエネルギー U という意味をもってくる．したがって，$\beta_k \ll 1$ のとき (16.7) は

$$\sum_{k=1}^{N}M_k+\frac{1}{c^2}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k u_k^2}{2}+U\right\}=M=\text{const.} \tag{16.8}$$

と表わされる．

あるいは，

$$\Delta M=\frac{1}{c^2}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k u_k^2}{2}+U\right\} \tag{16.9}$$

とも書ける．ただし，ΔM：

$$\Delta M=M-\sum_{k=1}^{N}M_k \tag{16.10}$$

は**質量欠損**と名づけられる量である．このように，式 (16.9) は**物体の古典的力学エネルギーは質量欠損に光速度の2乗をかけたものに等しい**ことを意味している．

粒子間相互の転換がないとき各種の粒子数は変化せず，また M の保存により質量欠損 ΔM も一定となるから，式 (16.9) は力学的エネルギーの保存

則

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k u_k^2}{2}+U=\mathscr{E}=c^2\varDelta M \tag{16.11}$$

という意味をもってくる．この場合，$\varDelta M=\text{const.}$ は，(16.10) より古典的な質量保存則

$$\sum_{k=1}^{N} M_k=\text{const.} \tag{16.12}$$

と一致する．結局，非相対論において**粒子間相互の転換がないとき**，固有質量の保存則は古典的なエネルギー保存則と古典的な質量保存則に分解される．

粒子相互間の転換が存在するときは，$\sum_{k=1}^{N} M_k$ は（したがって $\varDelta M$ も）不変でなく，そのため系の力学的エネルギーも (16.11) により変化する．それゆえ，古典的な性格をもつ式 (16.11) は，**物質がある形態から他の形態へ質的に変換**するとき，力学的エネルギーがどれだけ変わりうるかを示す関係式，という意味をもってくる．したがって，古典論には物質の質的な変換によって，力学的エネルギーの生成または消滅の可能性を意味する新しい事態が追加されることになる．

高速度の粒子に対しても，関係式 (16.9), (16.11) は相対論的に共変な形に表わすことができる．

いま $E_0=Mc^2$ を，$\vec{P}=0$ での粒子系のエネルギー，すなわち所定の状態にある系の**固有エネルギー**としよう．次にこの系に対して，N 個の粒子の固有質量 M_k の組で定められた構成において系の自己エネルギーが最小値をとるような状態を考える．これらの固有質量 M_k に

$$M_{N+1}=M^{(f)}=\frac{e_0^{(f)}}{c^2} \tag{16.13}$$

で定義される場のエネルギー $e_0^{(f)}$ の固有質量 M_{N+1} をも含めることにすれば，この状態の自己エネルギーは，(16.7) より

$$E_0^{(\min)}=\sum_{k=1}^{N+1} M_k c^2 \tag{16.14}$$

と表わされ，また固有質量は，

$$M^{(\min)}=\sum_{k=1}^{N+1}M_k \qquad (16.15)$$

に等しい．$M, M^{(\min)}, E_0, E_0{}^{(\min)}$ は4次元スカラー量であるから，(16.7) より，共変的な関係式

$$\mathscr{E}=E_0-E_0{}^{(\min)}=c^2(M-M^{(\min)}) \qquad (16.16)$$

が書ける．

相対論的に共変的なこの関係式は，系の自己エネルギーと固有質量のあいだの比例関係を表わす式 (16.7) よりも，深い物理的意味をもっている．この関係式は，最初，固有質量 M をもっていた系が，固有質量 M_k ($k=1, \cdots, N$) の N 個の粒子と $M^{(f)}c^2$ に等しい最小の場の相互作用エネルギーをもつ系に転換するときに発生する最大熱量を表わす．だから，$\mathscr{E}$ という量は熱力学的意味でのエネルギーであり，系の**活性エネルギー**と言ってよい．

(16.16) は，(16.10), (16.13), (16.15) より，つぎのように

$$\mathscr{E}=c^2\varDelta M-U \qquad (16.17)$$

と変形できる．ただし，

$$U=e_0^{(f)}=M^{(f)}c^2$$

と置いた．もし，最終状態で粒子が空間的に隔たっており場の相互作用エネルギー U が無視できるならば，式 (16.17) は簡潔な形

$$\mathscr{E}=c^2\varDelta M \qquad (16.18)$$

をとる．この式は，固有質量 M の系が，固有質量 $M_1, M_2, \cdots, M_N$ の N 個の粒子の集りに分解するときに必要な最大エネルギーを与える．

もし，固有質量 $M_1', M_2', \cdots, M_{N'}'$ の N' 個の粒子から成る系が，固有質量 $M_1, M_2, \cdots, M_N$ の N 個の粒子から成る系に転換するとすれば，系の活性エネルギーの増加分は (16.16) より

$$\varDelta\mathscr{E}=-c^2\varDelta M^{(\min)} \qquad (16.19)$$

に等しい．ただし，

$$\Delta M^{(\min)}=\sum_{k=1}^{N'+1}M'_k-\sum_{k=1}^{N+1}M_k \qquad (16.20)$$

最初と最終の状態において，自由粒子の集まりを考えると，粒子間の結合エネルギー（したがって場の質量 $M'_{N'+1}, M_{N+1}$）は無視できるから (16.20) の代わりに，

$$\Delta M^{(\min)}=\sum_{k=1}^{N'}M'_k-\sum_{k=1}^{N}M_k \qquad (16.21)$$

と書ける．

式 (16.19) は原子核あるいは素粒子間の相互転化などで，物質がある形態から他の形態に転化する際に形成される活性エネルギーを表わす．

§17. 質量はエネルギーに転化するか？

式 (16.16) は (14.14) とは異なる物理的内容をもっているが，やはり**アインシュタインの関係式**と呼ばれる．式 (16.17) の意味でのアインシュタインの関係式あるいは法則が核物理で適用される．この関係式を基にして，物体の質量はその中に含まれるエネルギーの尺度である，と主張される．また，この式とか，式 (16.19) を引用して，**質量のエネルギーへの転化**といったことがしばしば言われている．

質量がエネルギーに転化するという主張は，唯物論哲学者から特に精力的に反対され，逆に，観念論哲学者が唯物論を反駁するのに利用されてきた．われわれは，エネルギーという表現で，運動がある形態から他の形態に変化する際の定量的尺度として理解するのに慣れている．また，質量という表現を，物質の定量的尺度と理解している．

このような考え方は，19世紀後半に形成され，エンゲルスの《自然弁証法》で用いられている．この考え方にしたがえば，質量のエネルギーへの転換は，物質の消滅と運動の生成，すなわち，**物質の運動への転化**を意味することになる．このことは，物質とその運動の不滅の命題から出発する弁証法

的唯物論と矛盾するが，観念論哲学とは矛盾しないものである．これは物質の存在をわれわれの意識の外に存在する客観的実在とする唯物論の基本的命題の反証としてさえ利用されたりする．これらの矛盾を解明するために物理学の見地から，質量のエネルギーへの転化ということが，何らかの意味でいえるかどうか検討してみよう．

もし，時空の4次元的な表象から出発して，エネルギーを4次元運動量の第ゼロ成分に比例する量と考え，固有質量を4次元運動量の絶対値（すなわち，その《長さ》）として理解すれば，質量のエネルギーへの転化という主張はまったくその意味を失ってしまうことがわかる．なぜなら，エネルギーと質量は同じ物理量の異なる射影にすぎなく，あらゆる転化過程において，この2つの量は保存されるからである．孤立系では，任意の物理的な転換過程において全エネルギーと全固有質量は不変である．それゆえ，整合性をもって構成された相対性理論においては，質量のエネルギーへのいかなる転化も起こらず，式(14.14),(14.17),(16.5),(16.7)は質量とエネルギーおよび運動量の概念のあいだに存在する有機的な関係を表わしているにすぎない．

エネルギー・運動量と固有質量の保存則(16.4),(16.5)は，4次元理論において，物質がある形態から他の形態に変化するときの，物質の保存と運動の不滅を表わす統一的な法則である．

このように，エネルギーと運動量および固有質量を結びつける相対論的な式からは，物質または運動の消滅のいかなる可能性も導き出せない．それらから結論できるのは，物質転化と保存の普遍的な法則と運動保存の法則を統一的な自然法則として統合し，そこから物質と運動の不滅性を導き出すことの必然性だけである．この新しい事態は，弁証法的唯物論と矛盾するものではなく，むしろそれを補足し発展させるものである．

ところが，厳密な相対論的エネルギーと固有質量の概念を忘れて，エネルギーとして量 $E=cP_0$ の熱に変わりうる部分だけを理解するとすれば，式(16.9)と(16.16)は，エネルギーの新しい形態としての固有質量が古典的

な意味でのエネルギーに変換することを表わしている，と解釈できることになる．実際，(16.9) と (16.16) によれば，この《古典エネルギー》は，系を構成する部分の固有質量の総和が変化するような転換過程においては保存されない．この量は，(16.19) によれば，系の固有質量の和の減少分に比例する量だけ増加する．

この古典的な見地からは，構成部分の固有質量の和の変化をともなう物質の質的変換においては，《古典エネルギー》は保存されない．しかし，古典力学で運動エネルギーが保存されないで，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が保存されるように，物質の質的変換の過程で《古典エネルギー》に，構成部分の固有質量和の変換前後での差に c^2 をかけたものに等しい《潜在的な》エネルギーを加えたものが保存される，と考えることができる．したがって，$\varDelta M^{(\mathrm{min})}\cdot c^2$ を《潜在》エネルギーとみなせば，物質の質的変換において，質量のエネルギーへの変換が起こるのではなく，《潜在》エネルギーが古典的な活性エネルギーへ転化するのである．このように解釈するとき，公式 (16.19) は

$$\varDelta\mathscr{E}_{\mathrm{cl.}}=\varDelta\mathscr{E}+c^2\varDelta M^{(\mathrm{min})}=0 \qquad (17.1)$$

と書いた方がわかりやすい．まったく同様に，質量の古典的法則も，発生する古典エネルギーに，ある固有質量 $\varDelta\mathscr{E}/c^2$ を与えて，(16.19) を，

$$\varDelta M_{\mathrm{cl.}}=\varDelta M^{(\mathrm{min})}+\frac{\varDelta\mathscr{E}}{c^2}=0 \qquad (17.2)$$

と書き，構成部分の固有質量とエネルギーの固有質量を加えた量が保存される，と考えれば救われることになる．ここでも，やはり，質量が他の種類の質量に転化するのであって，エネルギーにではない．

こうして，質量のエネルギーへの転化という主張は物理的意味を欠く．したがって，このような主張を利用して哲学上の結論を導きだそうとする試みは根拠を失う．

関係式 (16.19) の結論を，物質の質的変換における《古典エネルギー》の

非保存と解釈したとしても，《古典エネルギー》は，保存される全エネルギーの一部分にすぎないから，運動消滅の主張の根拠にはなり得ない．

§18. 固有質量の非加法性

エネルギーや運動量とは異なり，固有質量は加法的な量ではなく，系の固有質量 M は構成粒子の固有質量 M_k の総和とは異なる．このことは粒子系の固有質量に対して (16.4), (16.5) より得られる一般式，

$$M=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\sum_k \frac{e_k}{c}\right)^2-\left(\sum_k \vec{p}_k\right)^2} \tag{18.1}$$

から直接わかる．個々の粒子の固有質量*)は，

$$M_k=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{e_k}{c}\right)^2-(\vec{p}_k)^2} \tag{18.2}$$

で与えられる．(14.13) によれば，運動量 $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=\frac{e}{c}\vec{\beta},\quad \vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c} \tag{18.3}$$

と表わされるので，(18.1) は

$$M=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\sum_k \frac{e_k}{c}\right)^2-\left(\sum_k \frac{e_k}{c}\vec{\beta}_k\right)^2} \tag{18.4}$$

と書ける．この式から，粒子のすべての速度が等しいとき，すなわち，

$$\vec{\beta}_k=\vec{\beta} \tag{18.5}$$

のときに限って，$M=\sum_k M_k$ が成り立つことがわかる．もし粒子の速度が異なり，すべての e_k が正**) $(e_k>0)$ であれば，重心系では式 (18.4) より，

$$M=\frac{1}{c^2}\sum_k e'_k=\sum_k \frac{M_k}{\sqrt{1-\beta'^2_k}}>\sum_k M_k \tag{18.6}$$

となる．ただし $\vec{\beta}'_k=\dfrac{\vec{u}'_k}{c}$，$\vec{u}'_k$ は重心系での粒子の速度である．

系が**光速度**で運動している粒子から成り立っている場合は，特別に興味が

---

*) 場が存在するときは，(18.1) の根号下の総和にその質量と運動量を含めて考える．

**) $e_k<0$，$M_k<0$ の粒子の可能性の問題は第7章で特別に考察する．

ある．このような粒子に対しては，$\beta_k^2=1$ であり，(18.2) と (18.3) によれば固有質量はゼロに等しい．しかし，式 (18.4) より，条件 (18.5) が満たされ，すべての粒子が同じ方向に運動しているときのみ系の全固有質量はゼロになりうる．もし，粒子の速度の方向が異なれば，$\beta_k^2=\beta^2=1$ であるから，

$$\left(\sum_k \frac{e_k}{c}\vec{\beta}_k\right)^2<\left(\sum \vec{\beta}\frac{e_k}{c}\right)^2=\left(\sum_k \frac{e_k}{c}\right)^2 \tag{18.7}$$

が成り立つ．これと，(18.4) により，$M>0$ が結論される．

こうして，ある空間角度内に分布した，（光速度の）光子から成る空間的に制限された任意の光束は，ゼロと異なる固有質量をもつことがわかる．したがって，個々の光子の固有質量はゼロであっても，光そのものに対しては，このことはもはや言えない．**あらゆる実在の光束はゼロと異なる固有質量をもつ．** ただ，厳密に同一方向をもつ光子の流れである光の無限平面波の場合に限って，全体の固有質量がゼロになりうる．だが，あらゆる実在の光束は空間的に制限されており，決して無限の平面波ではあり得ないから，このような光束は，現実には決して実現されない．

■第5章■

光速度を超える速度は可能か?

§19. 物理的過程の可能な速度

物理学においては，光速度より小さい速度や光速度だけでなく，光速を超える超光速度を取り扱う場合も生じてくる．実数の正の固有質量をもつ巨視的な物体やすべての既知の素粒子は，あらゆる基準系で光速以下の速度で運動する．固有質量ゼロの個々の光子は光速で運動する．ところが，ド・ブロイ波の位相速度とか稀薄な電子プラズマ中での電磁波の位相速度のように，超光速で伝播する物理過程も知られている．このように，あらゆる物理過程は，c 以下の速度と c を超える速度によって特徴づけられる．

§13 で証明したように，慣性系のあいだの移行によって光速以下の速度を超光速にすることとか，逆に超光速の速度を光速以下にすることは不可能である．また，光速度で伝播する過程はすべての慣性系において同じ速度 c である．このことを導く際に，すべての慣性系は光速度を超えない，すなわち $v<c$ であると仮定した．ローレンツ変換の構造からわかるように，$v>c$ のときダッシュをつけた座標は虚数になり，物理的な意味をもたせることができないからである．

こうして，実在の物理的時間と空間は互いに $v<c$ の速度で運動している慣性系によってのみ記述されることを認めると，光速度以下と光速および超光速の速度で伝播する過程のあいだには質的相異がある，という結論に到達する．

4次元的見地からは，光速を超える速度は，成分が虚数の4次元ベクトル

によって記述される．なぜなら，$u>c$ のとき(13.2)より，

$$(ds)^2=(dx_0)^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)<0 \tag{19.1}$$

であるから，ds は虚数量となり，それゆえ(13.5)で与えられる成分 U_k もまた虚数量となるからである．4次元速度の成分は，超光速の場合，(13.14)の代わりに，

$$(U_0, \vec{U})=\left(\frac{ic}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}},\ \frac{i\vec{u}}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}}\right) \tag{19.2}$$

と書ける．ここで，$\vec{u}$ と $\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}$ は実数である．この式により形式的な運動学的立場からも，超光速は光速以下の速度とは質的に異なり，ローレンツ変換では相互に変換できないことがわかる．

すでに述べたように，ある種の波動の位相速度は超光速で伝播する．具体的な例として複素スピノール場の波動 ψ_α を考察しよう．この場の単色平面波は*)，

$$\psi=\psi_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} \tag{19.3}$$

と表わされるが，その位相速度は，

$$\vec{u}=\frac{\omega}{k}\vec{n} \tag{19.4}$$

である．ここで，

$$\vec{n}=\frac{\vec{k}}{k} \tag{19.5}$$

は波面の法線あるいは波の進行方向である．(19.4)を用いると場の単色平面波 ψ は，

$$\psi=\psi_0 e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{u}\right)} \tag{19.6}$$

と書ける．この式からわかるように，$\vec{u}$ は，単色平面波の一定な位相面の伝播速度である．

---

*) 以下，スピノールの添字は省略して ψ_α のかわりに ψ と書く．また $\psi^*\psi=\psi_1^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2+\psi_3^*\psi_3+\psi_4^*\psi_4$ とする．

任意の場の単色平面波は，場の方程式の実質上実現され得ない理想的な特殊解である．実際には，種々の振幅と波動ベクトル $\vec{k}$ の平面波の重ね合わせとして表現できる，空間的にも時間的にも制限された波束を取り扱うのである．すなわち，

$$\psi(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\vec{k})e^{i[\omega(\vec{k})t-\vec{k}\vec{r}]}d\vec{k}. \tag{19.7}$$

ここで，$d\vec{k}=dk_xdk_ydk_z$ であり，関数 $\omega(\vec{k})$ は，考察している波動の**分散法則**を与える．

空間的に制限されたこのような波束は，その《重心》の運動速度と考えられる速度で一体となって空間中を伝播していく．波束の《重心》座標は，ベクトル

$$\vec{R}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{r}|\psi|^2d\vec{r}}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2d\vec{r}} \tag{19.8}$$

で与えられる．この式の分母は，(19.7) より，

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}g(\vec{k})g^*(\vec{k}')e^{i[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}')]t-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}d\vec{k}d\vec{k}'d\vec{r}$$

$$=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}g(\vec{k})g^*(\vec{k})d\vec{k} \tag{19.9}$$

と書ける．ここで，δ 関数の定義

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}d\vec{r}=(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}'), \tag{19.10}$$

$$\delta(\vec{k}-\vec{k}')=\delta(k_x-k_x')\delta(k_y-k_y')\delta(k_z-k_z')$$

を用いた．(19.8) の分子は，

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}g(\vec{k})g^*(\vec{k}')\vec{r}e^{i[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}')]t-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}d\vec{k}d\vec{k}'d\vec{r}$$

$$=\iiint_{-\infty}^{+\infty}g(\vec{k})g^*(\vec{k}')e^{i[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}')]t}i\nabla_k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}d\vec{k}d\vec{k}'d\vec{r} \tag{19.11}$$

と書ける．ここで，演算子∇_kは，

$$\nabla_k=\left(\frac{\partial}{\partial k_x},\frac{\partial}{\partial k_y},\frac{\partial}{\partial k_z}\right) \tag{19.12}$$

の成分をもつベクトルである．もし，関数$g(\vec{k})$が$\vec{k}\to\infty$で十分速く減少すれば，式（19.11）を部分積分して（19.10）を用いれば，（19.8）の分子は

$$-(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}[g^*(\vec{k})i\nabla_k g(\vec{k})-g^*(\vec{k})g(\vec{k})t\nabla_k\omega(\vec{k})]d\vec{k} \tag{19.13}$$

と表わせる．それゆえ，《重心》の運動速度は，

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{V}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\nabla_k\omega(\vec{k})\cdot|g(\vec{k})|^2d\vec{k}}{\int_{-\infty}^{+\infty}|g(\vec{k})|^2d\vec{k}} \tag{19.14}$$

に等しい．ベクトル

$$\nabla_k\omega(\vec{k})=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x},\frac{\partial\omega}{\partial k_y},\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right)=\vec{v} \tag{19.15}$$

は波動の**群速度**である．こうして，波束の《重心》速度は（19.14）より**波束の平均群速度**とみなせる．

$\vec{k}\to\vec{k}_0$で$|g(\vec{k})|^2$がδ関数$\delta(\vec{k}-\vec{k}_0)$に近づくような準単色的な波束の場合は，平均群速度は実質上$\vec{k}=\vec{k}_0$における真の群速度と一致する．したがって，準単色な波群の《重心》は群速度$\nabla_k\omega(\vec{k}_0)$で運動する．

波束（19.7）は一体となって伝播するだけでなく，容易にわかるようにその幅も変化する．

波束の幅の尺度としては平均自乗偏差に類似した

$$[\Delta(\vec{r})]^2=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(\vec{r}-\vec{R})^2|\psi|^2d\vec{r}}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2d\vec{r}} \tag{19.16}$$

を採用する．ゆえに，

$$\Delta(\vec{r})=\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}r^2|\psi|^2d\vec{r}}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2d\vec{r}}-R^2}. \tag{19.17}$$

(19. 17) の根号内の第1項の分子は (19. 7) により, つぎのように変形できる.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r^2|\psi|^2 d\vec{r} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{k}) g^*(\vec{k}') r^2 e^{i[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}')]t - i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{r}$$

$$= -\iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{k}) g^*(\vec{k}') e^{i[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}')]t} \nabla_k^2 e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{r}.$$

この式を2度部分積分して, (19. 10) を用いれば,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r^2|\psi|^2 d\vec{r} = -(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\vec{k}) \{\nabla_k^2 g(\vec{k}) - it[2\nabla_k \omega(\vec{k}) \nabla_k g(\vec{k}) - g(\vec{k}) \nabla_k^2 \omega(\vec{k})] - t^2 g(\vec{k}) [\nabla_k \omega(\vec{k})]^2\} d\vec{k} \qquad (19.18)$$

を得る. (19. 18) と (19. 9) を (19. 17) に代入して (19. 14) より,

$$\vec{R} = \vec{V} t + \vec{R}_0 \qquad (19.19)$$

であることを考慮すると, 最終的には,

$$\Delta(\vec{r}) = A\sqrt{(t-t_0)^2 + D} \qquad (19.20)$$

を得る. ここで,

$$A^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\nabla_k \omega(\vec{k})]^2 |g(\vec{k})|^2 d\vec{k} - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_k \omega(\vec{k}) |g(\vec{k})|^2 d\vec{k}\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\vec{k})|^2 d\vec{k}}. \qquad (19.21)$$

定数 t_0 と D もやはり $\vec{V}$ と $\vec{R}_0$ および (19. 18) に現われる積分項で表わせる.

こうして, 波束のひろがり速度は $t\to\infty$ で A に等しくなる. 準単色波束の場合, この速度は (19. 21) からわかるようにゼロに近づく.

いままでわれわれは, 複数スピノール場 ψ を考察したが, 他の場についても同様な結論が得られる. それゆえ, 任意の準単色波束は一体となって群速度で運動する*).

---

*) 詳しくは, R. セレブリャンヌイの論文 [6] と, V. A. トゥラコフの論文 [26] を参照されたい.

結局，波束の運動を物理的に特徴づけるのは，位相速度ではなく群速度であることがわかる．場のエネルギーは，波束の重心のまわりに集中しているから，場のエネルギーも明らかに群速度で伝播する．超光速の位相速度で伝播するようなすべての既知の波動過程に対して，その群速度は光速度以下である．たとえば，ド・ブロイ波に対して，

$$\omega=c\sqrt{k^2+\frac{c^2M^2}{\hbar^2}} \tag{19.22}$$

であり，これと，(19.4)，(19.15) を用いれば位相速度と群速度の積は，

$$uv=c^2 \tag{19.23}$$

に等しいことがわかる．それゆえ，$u>c$ のとき $v<c$ となる．

こうしてエネルギーを運ぶ実在の物理的速度は光速度以下であり，特別な場合に光速に等しいという，一般的な見解が確かめられる．波動の位相の伝播速度のみが超光速度であり，それと物質あるいはエネルギーの移動とは関係ない．

しかし次節で，このような結論はもっと深い物理的な考察により批判的に再検討すべきであることを示そう．

§20.　因果律の帰結としての光速度の限界性

相対性理論では，どんな**信号**も光速を超える速度では伝播しえない，という一般的な定理が証明されている．この場合，《信号》とは，暗黙のうちに，巨視的に観測可能な効果をひき起こしうる，巨視的な作用と理解される．また，信号は，ある点から他の点へ作用を運ぶもの，すなわち，われわれの意志によって点1から発せられ，点2で巨視的な過程をひき起こし吸収されるもの，と考えられている．

このように，信号はなんらかの物理的作因によって，ある点から他の点に運ばれる巨視的なエネルギーのかたまりと考えられる．それを運搬する作因としては，固有質量をもつ粒子とか個々の光子あるいは波群が考えられる．

単色平面波がなにか与えられた離散的な作用を運搬するには，どのようであろうと歪みをもたなければならないから波動の位相は，明らかに信号にはなりえない．単色平面波の任意の歪みはすでに波群を形成し，したがって位相速度ではなく群速度で伝播するからである．

いま述べた超光速の信号が存在し得ないという定理を証明しよう．まず，時刻 t_1 に点 x_1 で信号が放出される事象と，つぎに続く時刻 t_2 に点 x_2 でそれが吸収される，という2つの事象を考察する．信号の速度は明らかに，

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \tag{20.1}$$

に等しい．また，定義にしたがって，信号の放出はその吸収に先行する事象であるから条件

$$t_2>t_1 \tag{20.2}$$

が満たされる．

これらの2つの事象を，最初の系に対して速度 v で運動している慣性系 Σ から考察しよう．ローレンツ変換によれば，((11.6) 参照)

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\dfrac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{20.3}$$

であり，(20.1) の定義を用いると，

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\frac{1-\dfrac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{20.4}$$

と書ける．

つねに $v<c$ であるから，もし $u<c$ であれば，$\dfrac{vu}{c^2}<1$ が成り立ち，(t_2-t_1) にかかる因数は正数となる．それゆえ，$(t_2-t_1)>0$ から，$(t_2'-t_1')>0$ が結論される．つまり

$$u<c \quad \text{のとき,} \quad t_2'>t_1'. \tag{20.5}$$

このように光速以下の速度の事象は，その時間的順序を他の基準系に移行

することによって変えることはできない．

ところが，超光速の信号に対しては事情が異なってくる．もし，$u>c$ ならば，(20.4) より，$v<c$ で運動し，(t_2-t_1) にかかる因数が負となるような基準系 Σ' を見つけることができる．実際，$u>c$ のとき，

$$\frac{c}{u}<\frac{v}{c}<1 \tag{20.6}$$

を満たし，$1-\frac{uv}{c^2}<0$ であるような $v<c$ なる速度 v が存在する．

したがって，不等式 (20.6) で与えられる基準系の速度では，(20.4) の (t_2-t_1) にかかる因数は負であり，$(t_2-t_1)>0$ のとき，$(t_2'-t_1')<0$ が結論される．すなわち，$t_1<t_2$ のとき，

$$t_2'<t_1' \tag{20.7}$$

となり，これは，事象の時間的順序がこわれることを示している．

こうして，超光速の信号を仮定することは，基準系の選択により放出と吸収の時間的順序を逆転する可能性を認めることと同等である．しかし，そのような可能性を認めることは，基準系の選択によって，信号の放出という**原因**が，吸収という**結果**の後に起こりうるから物理学で定式化されている**因果律**と矛盾する．

とりわけ，つぎに述べる巨視的な例では，原因と結果の時間的順序の逆転の可能性はまったく無意味になろう．

いま，信号の源を銃とし，信号を弾丸とし，信号の受信装置を標的としよ

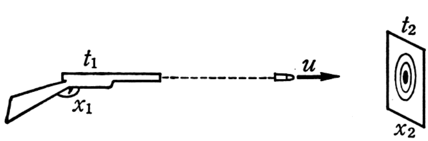


図 12

う．弾丸の速度が光速以下であれば，どんな基準系から観察しても原因である弾丸の発射は，弾丸の標的への命中という結果に先行する．ところが，も

し弾丸の速度が光速を超えれば弾丸の命中が，発射に先行する事象として観測できるような基準系をつねに見つけることができる*)．

このような逆転過程の実現不可能性あるいは不合理性は，因果律が破れないこと，言いかえれば，超光速の信号が存在しない，という事実の自明な論拠として引用される．この定理から出発して，相対性理論においては，光速以上で運動するどんな物体も存在せず，またエネルギーを運搬するどんな過程も存在しない，と考えられている．このことから弾性波が無限大の速度で伝播しうる弾性体の完全剛体は存在しないことが証明される．この場合，これらの結論はローレンツ群で表わされた時間・空間の相互連関としてではなく，相対性理論に応用された**因果律**からの帰結とみなさなければならない．そして，相対性理論が他の自然法則をともなわないで，理論それ自体が超光速の信号とエネルギーを運ぶ超光速の作因の存在を否定する，といった主張は正しくない．

こうして，超光速の信号と物理的作用が存在し得ないという純粋に物理的な結論を導くために，《因果律》という補足的な仮定を用いた．物理的結論は，物理法則または要請からのみひき出せるものだから，因果律は物理的命題あるいは法則とみなさなければならない．

一般哲学の立場からは，因果律は現象間の因果的必然性の概念と結びつけられる．因果的必然性を普遍的相互連関と区別するのは，作用の原因から結果への方向性によってである．この必然性は普遍的なものであり，あらゆる現象は他の現象の因果的必然性であると考えられている．しかし，われわれは本節で因果律として，2つの空間的に隔たった点 x_1, x_2 で時刻 t_1, t_2 に起こ

*) このような，事象の時間的順序の逆転は全過程の時間的順序の逆転と考えるべきであろうか．すなわち，最初に標的の熱エネルギーが1カ所に集中し，標的から弾丸が飛び出し銃身に飛びこみ，そしてすべての爆発物は集められ《最初》の装弾状態に完全に戻る．銃は装弾され，全過程が終了する．実際には弾丸の運動だけが逆転する．銃身と標的における過程はすべての基準系で同じ順序で進行する．これらの事象の最初の瞬間の順序だけが観測されるのである．

る2つの事象に関するもっと狭い意味のものを考えていた．そして，これらの事象は**因果的必然性**によるものであり，点1の事象は原因とみなし点2の事象は結果であると考えた．因果律を，原因は必ず結果に**先行**し，この事象の空間的順序は絶対的なものであり，基準系の選択や観測者の見方では決して変えられない，という主張として理解した．

以上をまとめると因果律について次のように理解した．“空間的に隔たった2点で起こる2つの因果的必然性をもつ事象のうち，1つは原因であり他は結果である．そして原因はつねに結果に先行し，この順序は基準系の選択によってこわれない”．

この命題で本質的なことは，因果的に結びつけられた事象の時間的順序は絶対的であり，決して破られない，ということである．普通の表現を用いると，“時間は過去から未来へと一定方向に流れる”．それゆえ，因果律と物理的な過程の時間の流れに対する概念とは，本質的には物理的に同じ主張である [7,8]*⁾．

§21. 因果律と熱力学の第2法則

今世紀の初め，統計物理学は熱力学および巨視的過程の物理学の基礎として広く一般に認められた．そして，物理過程の時間に関する方向性は，熱力学の第2法則を与える統計的な法則に由来する，ことが確立された．

時間に関する微視的運動法則の絶対的可逆性により，時間の流れの方向性は微視的にはまったく分離されない．あらゆる微視的過程は，時間の流れの正方向（過去から未来へ）に対しても，負方向（未来から過去へ）に対しても完全に対称的に起こる．微視的過程のどんな方向性も，巨視的な実験装置によって完全に規定される特殊な初期条件の結果として生じるのである．言いかえれば，時間に関するあらゆる非可逆性と方向性は，われわれをとりまく巨視的世界で観察される巨視的非可逆性の帰結である．そして，巨視的非

*⁾ このような見方はコスタ・ド・ボレガル [19] によっても論じられた．

可逆性は，純粋に統計的性格をもつ**熱力学の第2法則**の帰結である．

狭義の物理的定式化による因果律は，物理的な過程の時間の方向性で表わされ，この方向性は熱力学の第2法則から結論されるから，《因果律》は熱力学の第2法則の帰結または特別な表現とみなすことができよう．

《因果律》と熱力学の第2法則のあいだの関係を否定する見解は，あらゆる物理過程に対して，時間に関して特定の不変の方向性を要請する，（特別の）物理法則を導入することになろう．微視的世界においては，このことは微視的運動法則に，時間に関する非対称性を付与することを意味する．しかし，そのようなことを導入することに成功した人はまだいない．したがって，《因果律》を決して破られない絶対的な自然法則と考えようとする直観的な希望には，既知の運動法則の立場からは，いまのところ十分な根拠がない．

微視的世界での運動法則において真の非可逆性が発見されたとすれば，それがなにを意味するのか，考えることさえ困難である．微分方程式で表現された任意の法則に対して，時間の非可逆性は時間の符号の変化に関する非対称な項が存在することを意味する．このことは，ある物理量の時間に対する単調変化，言いかえれば，なんらかの非保存則と不可分に結びつけられる．ところが，微視的世界においては，すべてが巨視的世界よりも，はるかに確実性をもって運動の保存と物質の保存の上に構築されている．

このように，因果的必然性をもつ空間的に隔たった事象の時間的順序の不変性を主張する《因果律》は，巨視的性格をもつ法則である，とする十分な根拠がある．それは時間の流れを方向づけるものであり，エントロピー増大法則の帰結である．

この立場からは，ゆらぎ過程において熱力学の第2法則の破れが可能であると同様に，《因果律》の破れもまた可能である．したがって，相対性理論において因果律によって課される禁止は絶対的なものではなく，巨視的性格をもつ過程に対してのみ有効である．したがって，相対性理論において《因

果律》を基礎にしてなされる超光速で伝播する信号とか作用が存在し得ない，という結論は再検討をせまられる．

われわれの議論に，時間の方向性に関する直観的表象から由来するアプリオリな要素が入り込まないようにするために，熱力学の第2法則から直接出発して，この原理が物理的作用の伝播過程に課している禁止について調べよう．

§22. ネガエントロピーを運ぶ物理的な過程としての信号

情報理論の立場からは信号の受信は，**情報**を得ることを意味する．したがって点1から点2への信号の受信は，この2点間の情報の移動を意味する．

周知のように情報は**ネガエントロピー**（すなわち，非平衡状態に対する平衡状態のエントロピーの増加分）に比例する．それゆえ，信号という言葉は，それが発振系から受信系に送信されるときネガエントロピーを運ぶ局所的な作因であると限定して考える必要がある．局所的な作因はエネルギー*)を運び得るので，受信系の平衡状態のエントロピーを変えることができる．しかし，もし系の非平衡の尺度であるネガエントロピーを運ばなければそれは信号にはなり得ない．

このことは，サイバネティクスの考えに基づかなくとも純粋に熱力学的な観点からもよくわかる．実際，吸収された信号が記録されるためには，受信系においてなにか自発的な巨視的な過程をひき起こさなければならない．このようなことは，たとえば系を準安定な状態から安定状態に遷移させるのに必要なネガエントロピーを系に付与したときにのみ可能である．ここで必要なネガエントロピーは，これらの状態を分離しているエントロピーの最小値である．いま ΔS_1 を発振系のエントロピーの増加分とし，ΔS_2 を受信系のエントロピーの増加分とすれば，熱力学の第2法則から明らかに，

$$\Delta S_1+\Delta S_2\geq 0 \qquad (22.1)$$

---

*) エネルギーとして相対論的な表現(14.13)を考える．

が成り立つ．エネルギー ΔE を運ぶ過程は，

$$\Delta S_2 < \Delta S_2^0 \quad \text{あるいは，} \quad \Delta(S_2 - S_2^0) < 0 \qquad (22.2)$$

が満たされたとき信号になり得る． ただし，ΔS^0 は系のエネルギーが ΔE だけ増加したときの平衡状態における系のエントロピーの増加分である．明らかに，$\Delta S_1^0 = -\Delta S_2^0$ であるから，(22.1) より，

$$\Delta S_1 > \Delta S_1^0 \quad \text{あるいは} \quad \Delta(S_1 - S_1^0) > 0 \qquad (22.3)$$

が成り立つ．これは，信号を発振するとき発振系のネガエントロピー $(S_1^0 - S_1)$ が減少することを示している．

条件 (22.2) と (22.3) は，信号が光速以下で伝播すれば，他の基準系への移行によって破られない．ところが超光速の信号に対しては受信系による信号の吸収が，発振系による発振に先行する事象が起こるような基準系を選ぶことができる ((20.6) 参照)．すなわち，受信系は《発振系》に変わり，発振系は《受信系》に変わる．この場合には，発振によって《発振系》のネガエントロピーは増加し，吸収によって《受信系》のネガエントロピーは減少する．つまり，《信号》はネガエントロピーを逆方向に運ぶのである．

前に述べたことによれば， このような過程は条件 (22.1)—(22.3) に矛盾する．このような過程を用いると，発振系のネガエントロピーの増加を伴なう自発的な発振によって第2種の永久機関が作れるから，熱力学の第2法則を破ることができるからである．

こうして，**超光速の信号は実際，熱力学の第2法則によって禁止されること**がわかる．ところが，熱力学の第2法則はゆらぎ過程において破れ得るから，この禁止は絶対的なものではない．したがって，超光速でエントロピーを運ぶ局所的な作因も，あらゆるゆらぎ過程と同様に許容されるはずである．

この見方にしたがえば，超光速で伝播する作用は許されるが，ネガエントロピーを運ぶ《信号》にはなり得ない． もちろん，われわれの意志によって，ある点で超光速の過程を起こし他の離れた点で吸収させることはできな

い．その理由は，このような過程の系統的な反復は熱力学の第2法則の（ゆらぎによらない）系統的な破れを生じさせることになるからである．

熱力学の第2法則によって禁止されるのは，超光速で伝播し，それを用いて巨視的な非可逆過程をひき起こしうる作用を伝達する，巨視的過程だけである．この種の過程の例としては剛体における弾性作用の伝播過程，すなわち音波の伝播過程をあげることができる．それゆえ，剛体中の音速度は光速を超えることはない．完全剛体は，定義により変形を受けず一体となってのみ運動し，完全剛体内では音速は無限大になるはずだから，このことは**巨視的な完全剛体は存在しない**ことを意味する．完全剛体を用いれば，空間的に隔たった2点間で巨視的作用を瞬時に伝達することが可能となろう．このことは，熱力学の第2法則によって禁止されるので巨視的世界では実現不可能であり，同時に，それは巨視的な完全剛体が実現不可能であることを意味する．

§23.　素粒子内部での超光速過程は可能か？

巨視的な完全剛体が存在しないという前節の結論は，素粒子も含めて例外なくすべての物理的対象について適用されてきた．素粒子は「不可分」であり，そのような対象としては，内部で作因が超光速で伝播し得るような完全剛体だけが考えられるから，素粒子は空間的な大きさをもち得ないと主張されている．もし素粒子が点でなければ素粒子の内部で超光速の過程が起こり，それは上述の定理によって禁止されるから，素粒子は点でなければならない．

この結論は，素粒子の内部を伝播する作因が，巨視的信号の性格をもつという仮説を基礎にして引き出されたものである．言いかえれば，素粒子の内部で進行する過程に対して，§20の終わりで導かれた狭義の定式化での《因果律》が適用できる，あるいは素粒子の内部でも熱力学の第2法則が絶対的な性格をもっているという仮説に基づいている．

しかし，素粒子の内部においては空間的に隔てられた事象に対して，きわめて緊密な関係を仮定するほうが，より真実に近い仮説に思われる．この関係は非常に緊密なので，空間的に隔たった事象は**因果的に相互規定**されているが，ある点での原因とか別の点での結果というふうに分離できないものであろう．このとき，事象の時間的順序の変化は因果的な相互規定性およびより広義での因果律の破れを意味しない．エントロピー増大法則の帰結である，狭義の《因果律》といわれる法則だけが破れるのである．そして，エントロピー増大法則が素粒子内部のあらゆる過程に対して成り立つことを要求する根拠はなにもないのである．逆に，熱力学の第2法則がきわめて大きな巨視的性格をもっていることから，素粒子の内部では主として，第2法則の破れを伴なうようなゆらぎ的な過程が進行すると考えられる十分な根拠がある．

こうして，相対性理論と因果律の内容をより広義に理解することによって，素粒子は必ずしも点ではないという結論に導かれる．このような立場からは，素粒子は空間的な構造をもっていてその内部では物理的作用が超光速で伝播する，と考えられる．

10^{-13} cm のオーダーの間隔における因果律の破れの仮定は以前にもブロヒンツェフやハイゼンベルクなどによってなされた．しかし，そのような仮定に対しては，10^{-13} cm のオーダーの間隔における因果律の破れは，基準系の選択によって任意に大きな距離での因果律の破れに置き換えることができ，したがって微視的世界における因果律の破れの仮定は巨視的世界における破れの仮定に導く，という深刻な異議が提出された．

この証明を詳しく考察しよう．相互規定性をもつ2つの事象，x_1, t_1 と x_2, t_2 が空間的距離

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0 \tag{23.1}$$

によって隔たっているとしよう．あるいは，同じことであるが，

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}>c \qquad (23.2)$$

とする．ローレンツ変換によれば，他の基準系においては，

$$x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=(x_2-x_1)\frac{1-\dfrac{v}{u}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (23.3)$$

となり，$u\gg c$ のとき，

$$x_2'-x_1'\approx\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (23.4)$$

を得る．したがって，もし，2点 x_1 と x_2 のあいだに《因果律》を破る過程が生ずれば，系 Σ' ではこの過程は2点 x_1' と x_2' のあいだに起こり，そのとき距離 $l'=x_2'-x_1'$ は $v\to c$ のとき，距離 $l=x_2-x_1$ をいくらでも越えるようにすることができる．

しかし，この場合，因果律が破れる確率は，事象間の距離が増加するのと同じ割合で減少することを指摘しておこう．実際，もし考察している《非因果的》事象が系 Σ で頻度 ν で起これば，系 Σ' では運動している時計の遅れの効果により，同じ現象は頻度

$$\nu'=\nu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (23.5)$$

で起こることになり，それゆえ，

$$l'\nu'=l\nu \qquad (23.6)$$

が成り立つ．したがって《非因果的》事象の頻度は，事象間の距離が増大するのと同じ割合で減少する．

このように，因果律の破れは巨視的効果にまでなりうるが，そのような破れの確率は問題にならないほど小さい．このことは《因果律》の熱力学的解釈とよく合致する．統計的な見地からは，熱力学の第2法則のどんな規模の破れも可能であるが，そのようなゆらぎの確率は，第2法則からのずれの規

模が大きいほど小さくなる．

こうして《因果律》の熱力学的な解釈においては，超光速でのエネルギーの2点間の伝播は絶対的には禁止されず，ゆらぎ型の過程として許容される．

超光速で運動する粒子は物理的に許容される対象となるが，われわれの思うままに放出させ，非可逆的な巨視的過程を励起し吸収させる，といったことは不可能である．

(4.13) と (14.17) より，任意の粒子に対して，

$$\vec{P}=\frac{E}{c^2}\vec{u}, \quad c^2M^2=\frac{E^2}{c^2}-\vec{P}^2 \tag{23.7}$$

であるから，超光速の粒子は，$u>c$ であることを考慮すると，

$$M^2<0 \tag{23.8}$$

となる．すなわち，固有質量は虚である．

こうして，われわれは超光速で運動している**虚の固有質量をもつ粒子**の存在が，物理的に許容されるという結論に到達した．

■第 6 章■

負と虚の固有質量

§24. 固有質量の定義

前章の終わりで，相対性理論は超光速の虚の固有質量をもつ粒子の存在を許容することをみた．このような粒子は因果律によってのみ禁止される．しかし，因果律を絶対的な物理法則としてではなく熱力学の第 2 法則の帰結としてみなすときは，この禁止は解かれる［9, 10］.

相対性理論は負の質量をもつ粒子をも許容する．このことはディラック［11］によって電子の相対論的量子論との関連で示された．このような粒子は熱力学と因果律という一般的命題が破られないという補足的な判断から（すなわち，虚の固有質量の粒子の存在が否定されるのと同じ理由で）普通，物理的に許容されないと考えられている．

しかし，第 5 章で示したように，因果律あるいは熱力学から借用された補足的な考察は絶対的禁止に導かないことから，負または虚の質量をもつ粒子存在の仮説は理論的には根拠がある，と考えてもよいだろう．

この仮説の前途を明らかにするために，それからひき出される結論を考察しよう．最初に，負と虚の質量をもつ粒子の一般的性質を相対論的力学の規則から導いてみよう．（14. 17）に対応して固有質量 M は，4 次元運動量 P_α の不変的《長さ》

$$c^2M^2=P_\alpha P_\alpha=\frac{E^2}{c^2}-\vec{P}^2 \tag{24.1}$$

として定義される．今後，簡単のために《固有質量》の代わりに，しばしば

単に《質量》と呼ぶ.

粒子系に対しては，明らかに，

$$E=cP_0=\sum_k e_k, \quad \vec{P}=\sum_k \vec{p}_k. \tag{24.2}$$

ここで，e_k と $\vec{p}_k$ は，

$$c^2m_k^2=\frac{e_k^2}{c^2}-\vec{p}_k^2 \tag{24.3}$$

を満たす固有質量 m_k の粒子のエネルギーと運動量である．通常の $M^2>0$ の場合，質量 M の符号はエネルギー E の符号と一致している，と考えられる．

(24.1) によれば，もしベクトル P_α が時間的 ($M^2>0$) であれば，固有質量は**実数**であり，空間的 ($M^2<0$) であれば**虚数**である．質量**ゼロ** ($M=0$) の場合は，実数質量の特別な場合とみなされる．

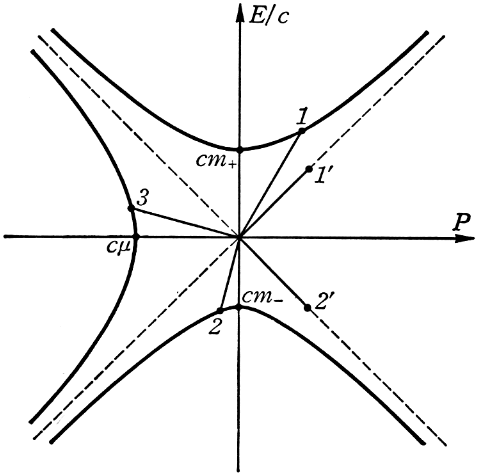
このように，もしベクトル成分 P_α を任意の実数とすれば，式 (24.1) は3つの質的に異なる物理系を許容する．

1. 正または0の固有質量をもつ系　　$M^2\geq 0, \quad E>0$
2. 負または0の固有質量をもつ系　　$M^2\geq 0, \quad E<0$
3. 虚の固有質量をもつ系　　$M^2<0.$

したがって相対論的力学は3種の質的に異なる系を許容するが，そのうち，第1種の系だけが物理的な実在と考えられている．第2種と第3種の系は，因果律あるいは熱力学の一般的命題によって禁止される，と考えられている．第2種の系は，明らかに負の質量をもつディラックの反電子（陽電子）に関連させ，第3種の系には場の量子論の仮想粒子に関連させることができる．これら粒子は両方とも実在しないと考えられているが，相対論的運動学と力学の枠内では第2種と第3種の粒子を除外すべき根拠はなにもない．これらの粒子を禁止するのに用いられる因果律は，本質的に異なる巨視的な性格をもち，相対論的運動学や力学からは出てこない．

§25. 固有質量が正，負および虚の粒子系の一般的性質

3種類の粒子からなる系の一般的性質を調べるには，図13に示した$(P, E/c)$のグラフが便利である．この図には，3種類$(1,2,3)$の粒子全部



1. $M^2>0,\ E>0,\ M=m_+>0$ 1′. $M=0,\ E>0$
2. $M^2>0,\ E<0,\ M=m_-<0$ 2′. $M=0,\ E<0$
3. $M^2<0,\ M=i\mu$

図 13

が，正(1′)と負(2′)のエネルギーをもつ質量ゼロの粒子の場合も含めて描かれている．質量m_+, m_-, μの絶対値は，それぞれ粒子が描く双曲線と軸E/cまたはPとの交点によって定められる．

系をもっと完全に特徴づけるために，系の平均速度

$$\vec{V}=\frac{\vec{P}}{E}c^2 \tag{25.1}$$

を導入しよう．第1種と第2種の粒子系の場合$|\vec{V}|\leq c$であり，第3種の系の場合は$|\vec{V}|>c$である．系が1個の粒子から成るとき，平均速度$\vec{V}$は粒子の真の速度と一致する．

個々の粒子は，系とまったく同様に分類されるが，粒子の集合は，その集合を構成する個々の粒子とは一般的には異なった性質を示す．

(24.2) より，全体のベクトル $(\vec{P}, E/c)$ はベクトル $(\vec{p}_k, e_k/c)$ の単純な幾何学的な総和であり，ベクトルの不変の《長さ》(Mc) は，双曲線上のベクトル端の軸 E/c または軸 P 上への《射影》で定められる．したがって，粒子系の固有質量に関する次の定理は，グラフ（図13）を用いれば容易に証明できる．

Ⅰ． すべての $m_k>0$ なら， $M>0$ である．

Ⅱ． すべての $m_k=0$ で，$e_k>0$ なら， $M\geq 0$，$E>0$ である．

Ⅲ． すべての $m_k<0$ なら， $M<0$ である．

Ⅳ． すべての $m_k=0$ で，$e_k<0$ なら， $M\leq 0$，$E<0$ である．

Ⅴ． すべての $m_k^2<0$ なら，M は任意である．($M^2\geq 0$ あるいは $M^2<0$)

言いかえれば，第1種と第2種の粒子の集合は，それぞれ第1種と第2種の系のみを形成するが，第3種の粒子の集合は（Ⅴにより）任意の種類の系を形成しうる．

同様に，異なる種類の粒子を含む系に対しては，つぎの定理が容易に証明できる．

Ⅵ． 第1種と第2種の粒子がそれぞれ1個以上から成る粒子の集合は，任意の系を形成しうる．

Ⅶ． 質量が正と負の（m_+ と m_-）2粒子から成る系はつぎの系を形成しうる．もし $m_++m_->0$ なら，全体の質量は，$M>0$（第1種の系）または $M^2<0$（第3種の系）である．もし $m_++m_-<0$ なら，$M<0$（第2種の系）または $M^2<0$（第3種の系）を形成する．もし $m_++m_-=0$ なら，$M=0$（第1種の系）または $M^2<0$（第3種の系）である．

Ⅷ． 任意の数の第1種と第3種の粒子から成る集合は，第1種または第3種の系を形成する．同様に第2種と第3種の粒子から成る集合は，第2種または第3種の系を形成する．

上述した定理は，正，負および虚の質量をもつすべての種類の粒子のあい

だに緊密な関係があることを示している.

実験で観測されているすべての既知の粒子は，特別の場合$1'$（光子など）も含めて第1種に属し，$M\geq 0$, $E>0$ である．定理ⅠとⅡによれば，これらの粒子が形成する系もやはり第1種である．ところが，負の質量をもつ粒子1個の存在を仮定するだけで，定理Ⅵによれば，3種類すべての粒子が存在する．それゆえ，負の質量を導入することによって，同時に虚の質量をも導入することになる.

実の質量をもつ孤立した粒子は，(25.1)によれば，光速以下の速度でのみ運動し，質量ゼロの粒子は光速で，また虚の質量の粒子は超光速でのみ運動しうる*)．ところが，(25.1)と定理Ⅵによれば，正と負の質量をもつ粒子より成る集合は，全体で虚の固有質量をもつことができ，したがって，そのとき光速を超える平均速度で運動することになる．このことは，どのように理解したらよいだろうか？　系の各構成粒子は，光速以下で運動しているのではないか？

この問題を明らかにするために，正と負の質量をもつ2つの粒子から成る系を考察しよう．簡単のため $m_+=|m_-|=m$ とおき，これらの粒子は直線 x にそって，同じ速度 v で反対方向に運動しているとしよう．この系では，明らかに $E=0, P=2mv$ であり，それゆえ $M^2=-4m^2v^2<0, V=\pm\infty$ を得る．2つの粒子が，点 $x=+a$ と $x=-a$ に配置されている物体 A と B によって**同時**に吸収されたとしよう．正の質量をもつ粒子の吸収は物体 A のエネルギーの増加を，また負の質量をもつ粒子の吸収は物体 B のエネルギーの減少を意味するから，この過程は物体 B により，あるエネルギーが放出され物体 A によりそれが吸収される過程とまったく同等である，と見なせる．これら2つの過程は同時に起こるはずであるから，この過程は全体として物

*) 以後，実の正の質量をもつ粒子は，ブラディオン (bradyon) [あるいはターディオン (tardyon)]，質量ゼロの粒子はルクソン (luxon)，虚の質量の粒子はタキオン (tachyon) と呼ぶことがある.

体 B から物体 A にエネルギーが無限大の速度で伝播する，と考えられる．基準系を適当に選ぶことによって，この速度は有限にすることができるが，§13の終わりで証明したように，それは任意の基準系で超光速である．

このように，平均速度 V は，相対論的に定義されたエネルギーの伝播速度と理解できる．しかし，事象 A と B は原因–結果という関係にないから上述した過程は点 B から点 A への信号（すなわち情報）の伝達には用いられない．したがって，$v>c$ の速度でエネルギーの伝達は可能であるが，信号は超光速では伝達できない*)．

§26.　超光速の粒子タキオンはエネルギー・運動量保存則を破るか？

ローレンツ変換と，その帰結である4次元速度の変換則（13.8）にしたがうと，4次元運動量は

$$P_1'=\frac{P_1-\beta P_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad P_2'=P_2,\quad P_3'=P_3,\quad P_0'=\frac{P_0-\beta P_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{26.1}$$

と変換される．ただし，$\beta=v/c$．x_1 軸にそって運動している粒子に対しては，

$$P'=P\frac{1-\dfrac{v}{u}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\qquad E'=E\frac{1-\dfrac{vu}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{26.2}$$

が成り立つ．ただし，

$$u=c^2\frac{P}{E} \tag{26.3}$$

は粒子の速度である．

これらの公式によれば，$u<c$ である第1種と第2種の粒子は，他の基準系への移行に際して，エネルギーは符号を変えないが運動量はその符号を変え得る．第3種の粒子タキオンは $u>c$ であるから，運動量はすべての基準系で同じ符号をもち，エネルギーは相対速度 v が，

---

*) 本書ではタキオンの量子論的な性質については論じない．量子論的な考察の試みには論文［22, 23］がある．

$$v=\frac{c^2}{u}\qquad\qquad (26.4)$$

に達したとき，その符号を変える．速度の変換則（13.16）より，

$$u'=\frac{u-v}{1-\dfrac{vu}{c^2}}\qquad\qquad (26.5)$$

であるから，系Σ'で測られる3次元速度も（26.4）の値でその符号を変える．

したがって，タキオンに対しては，3次元速度の方向と（26.2）で定義される3次元運動量の方向とがすべての基準系で一致するとはかぎらない．3次元速度の方向と3次元運動量の方向とが一致するとか，あるいは一致しないという客観的事実が，物理学者によって選ばれる時間・空間の表現方法である基準系の選択の仕方に依存することになるので，このことは式（26.1）と（26.2）がパラドックスに導くことを意味している．以下で示すように，変換則（26.2）がある種の基準系でタキオンの放出あるいは吸収の過程においてエネルギー・運動量保存則の破れに導くという事実は，さらにパラドックス的であろう．

図14で示すように，実の質量Mをもつブラディオンによる虚の質量$i\mu$をもつタキオンの吸収，という最も簡単な場合を考察しよう．質量Mが変化しない自由なブラディオンは，他のブラディオンを放出あるいは吸収する

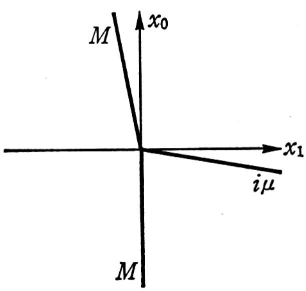


図 14

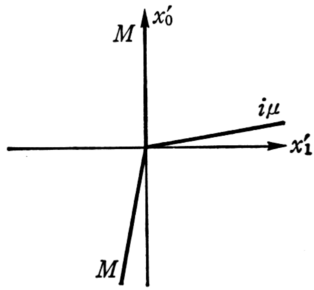


図 15

ことはできない．しかし，相対論的力学によればブラディオンによるタキオンの放出あるいは吸収は許容されるのである．

実際，保存則により系の全質量 M は保存される．それゆえ，質量 M_1 と M_2 の粒子が衝突して質量 M に変わるような場合，

$$c^2M^2=\left(\frac{E_1}{c}+\frac{E_2}{c}\right)^2-(\vec{P}_1+\vec{P}_2)^2$$

$$=c^2M_1^2+c^2M_2^2+2\left(\frac{E_1}{c}\frac{E_2}{c}-\vec{P}_1\vec{P}_2\right) \qquad (26.6)$$

が成り立つ．もし，衝突前に粒子 M_1 が静止していれば，$\vec{P}_1=0$，$E_1=M_1c^2$ であるから，(26.6) より，

$$E_2=-\frac{c^2}{2M_1}[M_2^2+M_1^2-M^2] \qquad (26.7)$$

を得る．考えている過程で，ブラディオン（第1の粒子）は，タキオン（第2の粒子）を吸収しても，その固有質量を変えないから，$M_1=M$ とすると，

$$E_2=-\frac{c^2}{2M}M_2^2 \qquad (26.8)$$

が成り立つ．他方，この過程に対して，明らかに

$$E_1+E_2=E>E_1=Mc^2 \qquad (26.9)$$

が成り立つ．ここで E はタキオン吸収後のブラディオンのエネルギーである．(26.9) より，

$$E_2>0. \qquad (26.10)$$

この不等式は (26.8) より $M_2^2<0$ のときだけ，すなわち，吸収される粒子がタキオンの場合にのみ成り立つ．ブラディオンの場合には，不等式 (26.10) が満たされるのは，(26.7) より，

$$M^2>M_1^2+M_2^2>M_1^2. \qquad (26.11)$$

すなわち，$M \neq M_1$ のときだけである．

このタキオンの吸収過程を，図15に示してあるように，ブラディオン（第1の粒子）がタキオン（第2の粒子）との相互作用の後，静止しているよう

な座標系で考察しよう．この基準系においては，虚の質量 $i\mu$ をもつタキオンが，実の質量 M のブラディオンによって放出される．それゆえ，(26.9) の不等式の代わりに，

$$E_1=Mc^2+E_2'>Mc^2 \tag{26.12}$$

と書かなければならない．ここで E_2' は，放出されたタキオンのエネルギーであり，(26.12) より，

$$E_2'>0. \tag{26.13}$$

こうして，エネルギー保存則によりタキオンのエネルギーは，両方の基準系で正でなければならない．ところが，式 (26.2) と (26.5) によれば，

$$E_2'=-E_2 \tag{26.14}$$

である．それは図 14 と図 15 より明らかなように，

$$u_2'=-u_2 \tag{26.15}$$

であるからである．(26.14) は，エネルギー保存則から導びかれる不等式 (26.10) と (26.13) とは明らかに矛盾する．したがって，タキオンに変換則 (26.2) を適用すると，3 次元速度が変換の結果その符号を変えるとき，エネルギー保存則に矛盾する結果が導かれる．この場合，同様に運動量保存則も破れることは，図 14 と図 15 との比較によって容易に示される．図 14 では，タキオンの運動量は左方を向き，図 15 では同じタキオンの運動量は右方を向いている．ところが，式 (26.2) によれば運動量はその符号を変えないから，この場合，明らかにこれらの式は運動量保存則と両立しないことがわかる．

このような 4 元運動量の成分の変換則と保存則のあいだの矛盾は，

$$uv>c^2 \tag{26.16}$$

の場合には，式 (26.2) の右辺に -1 をかけておけば解決される．つまり，エネルギーと運動量保存則は，変換則 (26.2) と両立するのではなく，変換則

$$P'=u'\frac{E'}{c^2},\quad E'=E\frac{\left|1-\frac{uv}{c^2}\right|}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u'=\frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} \tag{26.17}$$

にしたがうのである．これらの式は，$uv<c^2$ のときは明らかに (26.2) と一致する．したがって，式 (26.17) はブラディオンについては，$u<c$ であるから (26.2) と同等である．式 (26.17) を (26.1) と同様な形に書きなおすと，

$$P_1'=\gamma\frac{P_1-\beta P_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad P_2'=\gamma P_2,\quad P_3'=\gamma P_3,\quad P_0'=\gamma\frac{P_0-\beta P_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\gamma=\frac{1-\beta\frac{P_1}{P_0}}{\left|1-\beta\frac{P_1}{P_0}\right|}. \tag{26.18}$$

結局，タキオンに対しては4次元運動量は，(26.17) と (26.18) の式によって変換されるベクトルとして定義しなければならない．その場合にかぎって，条件 (26.16) を満たす速度をもつような新しい基準系への移行に際して，エネルギーと運動量保存則は破られない．

式 (26.17) と (26.18) によれば，第3種の粒子タキオンのエネルギーはいかなるローレンツ変換に対してもその符号を変えない．したがって，タキオンは正のエネルギーをもつ粒子と負のエネルギーをもつ粒子の2つの組に分けられる．そして，ローレンツ変換によってある組の粒子を他の組の粒子に変えることはできない．

§27.　重力場における負の質量の粒子ネガトン*)

ネガトンの運動は，明らかにミンコフスキーの方程式 (14.1)―(14.4) によって決定される．だから，ネガトンの加速度は (14.1), (14.2) により，

*)　今後，普通の正の質量をもつ粒子はポジトン (positon)，負の質量をもつ粒子はネガトン (negaton) と呼ぶ．

$$\frac{d^2X_k}{d\tau^2}=\frac{dU_k}{d\tau}=\frac{F_k}{M} \qquad (27.1)$$

であるから作用する力F_kと逆方向を向いている．したがって，電場においては同じ電荷のポジトンとネガトンはそれぞれ逆方向に加速されるだろう．しかし，重力場においては**等価原理**によって，ネガトンはポジトンと同じ方向に加速されなければならない．この等価原理によれば，例外なくすべての対象は，同一重力場では同一加速度を得る．したがって，等価原理から出発して，外部重力場では質量$-M$のネガトンには質量Mのポジトンに作用する力$\vec{F}$と絶対値が等しく方向が反対の力$-\vec{F}$が作用するはずである．言いかえれば，ポジトンと同様にネガトンも式，

$$e=\sqrt{-\kappa}M \qquad (27.2)$$

で定義される《重荷》*)をもつと考える．ここで，κは重力定数である．

こうして，普通の大きな重力質量（地球，太陽，恒星，銀河など）はポジトンのみならず，ネガトンにも同じ加速度を与え引きつける．

大きな負の質量の作る重力場においては，ポジトンとネガトンは異なったふるまいをするだろう．負の質量による重力場は正の質量の重力場とは逆の符号をもつ《重荷》によって作られるから，正の質量による重力場とは反対の方向を向き，そのため，大きな負の質量からは，これらの粒子に斥力が働く．

ネガトンから成る系の重力相互作用がポジトンから成る系とは異なる効果をもたらすことは，明らかであろう．実際，重力相互作用により，ポジトン間に引力が働くが，ネガトン間には，互いに斥力が働く．このように，ポジトンで満たされている空間では，実在の宇宙がそうであるように，物質の凝縮が起こり，非常に不均等な密度で物質は分布するはずである．もし，空間

---

*) クーロンの法則で与えられる電荷と同様に，非相対論的領域では，重力場はニュートンの万有引力の法則に従って(27.2)で定義される《重荷》によって作られると考える．

がネガトンで満たされていれば，粒子間の斥力のため均一な密度で物質は分布するだろう．

ネガトンの存在を仮定すれば，平均して固有質量ゼロの宇宙モデルが考えられる．実在の宇宙では，ポジトンの平均密度は非常に小さく約 10^{-30} g/cm^3 である．これは 1 m^3 中に約 1 個の陽子が存在することに相当する．銀河間の空間は，これより少し低い密度の媒質で満たされている．物質の密度が 10^5～10^9 g/cm^3 といった大きな値に達するのは，（宇宙空間に比較すれば）とるにたらないほど小さな体積を占める恒星の内部においてだけである．もし，ポジトンのほかにネガトンも存在するとし，その平均密度がポジトンのそれとほぼ等しいとすれば，ネガトンは互いに反撥することから，宇宙空間の任意の点で，ネガトンの密度は平均密度程度の値をもつと考えるべきである．この密度の値が非常に小さいことにより，われわれが地球上の条件でネガトンを観測できず，またネガトンがポジトンからなる周囲の媒質に及ぼす作用にも気がつかない，という事情が説明できよう．しかし，銀河系の尺度ではネガトンのバックグランドの存在は顕著な効果をもたらしうる．たとえば，ほぼ一定密度 ρ のネガトンの分布は，個々の質量 M の銀河の重力場を

$$R=\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \tag{27.3}$$

程度の距離で実質上，完全に相殺するはずである．なぜなら，半径 R の球に満たされているネガトンの質量の絶対値 $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)$ は，この球の中心に存在する銀河系の質量 M に等しいからである．

このような**重力遮蔽**の現象をさらに詳しく調べてみよう．そのためにネガトンは負の温度 $T<0$ で平衡状態にあり，大きな正の質量が作り出す重力場で，ボルツマンの式

$$n^-=n_0^-e^{-\frac{m^-\varphi}{kT}} \tag{27.4}$$

によって分布しているとしよう．ただし，n^- はネガトンの密度，n_0^- はメタ銀河におけるネガトンの平均密度であり，m^- はネガトンの質量である．ま

たφはニュートン近似での方程式

$$\nabla^2\varphi=4\pi\kappa(m^+n^++m^-n^-) \tag{27.5}$$

で与えられる重力場のポテンシャルである．平均質量がゼロであるような宇宙に対しては，明らかに，

$$m^+n_0^++m^-n_0^-=0 \tag{27.6}$$

が成り立つ．さらに，重力場をつくりだす自由な正の質量の密度は，

$$\rho=m^+(n^+-n_0^+) \tag{27.7}$$

に等しいとし，また，

$$\frac{m^-\varphi}{kT}\ll 1 \tag{27.8}$$

を仮定すれば，φに対して方程式

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{\Lambda^2}\varphi=4\pi\rho\kappa \tag{27.9}$$

を得る．ここで，

$$\Lambda=\sqrt{\frac{k|T|}{4\pi\kappa|m^-|^2n_0^-}} \tag{27.10}$$

である．

このように，ニュートン近似での重力ポテンシャルに対しては，ポアソン方程式ではなく，ネガトンの温度と平均密度に依存する，宇宙定数Λを含むノイマン方程式を得る．

Λを越える距離では，ポジトンから成る任意の対象の重力場に重力遮蔽が起こる．それゆえ大きさがΛ以下の個々の銀河は，Λを越えるような距離においては相互に引き寄せ合うことはない．大きさがΛを越えるような銀河においては，その周辺部分が中心部分からの引力で維持されないために，このような銀河から，周辺の物体が放出されることになる．

(27.10) の式において，$n_0^-=10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-3}$，$T=3°\mathrm{K}$ とし，ネガトンの質量として，核子の質量を用いて計算すると，$\Lambda=10^{22}\,\mathrm{cm}$ を得る．

平均質量がゼロである宇宙モデルは，相対論的宇宙論において特に興味深

いものであることを指摘しておこう.

§28. 負の質量と因果律

ネガトンが存在するという仮説に対して，知られているすべての反駁のうち，最も本質的なものは因果律からの，あるいは同じことであるが，熱力学の第2法則からの反駁である（[9,10] 参照). 他のすべての反論は，それに帰着されるか，あるいはある程度それと関連している. この主要な反論を解析しよう.

ネガトンが，たとえば，光子や π^0 中間子と同様に通常の粒子から成る系によって放出されたり吸収されたりすると仮定しよう. 時刻 t_1 に系 A によって放出されたネガトンが，時刻 t_2 に系 B によって吸収されたとする. もちろん，$t_2>t_1$ とする. ネガトンの**放出**は系 A のエネルギーと運動量の増加を意味し，それは（絶対値が）同じ質量と速度をもつポジトンの**吸収**と同じことである. 同様に，系Bによるネガトンの吸収は，この系によるポジトンの**放出**と同等である.

このように巨視的に見れば，系 A によるネガトンの放出と系 B によるその吸収は，系 B によるポジトンの放出と系 A による吸収過程と同じことである. この過程では吸収は放出に**先行**するので**因果律**の破れが起こる.

熱力学の見地からはこのことは過程が熱力学の第2法則の破れをともなって起こることを意味する. 実際，ポジトンの放出過程は，放出源のネガエントロピーが減少するように起こる. 放出された粒子は，ネガエントロピー（すなわち，正の情報）を運び，吸収系のネガエントロピーは，ポジトンを吸収したとき増加する（系は励起状態に移行し，その結果，非可逆過程が起こりうる). また，ネガトンの放出は，明らかに放出源のネガエントロピーの増加を伴なう過程であり，その吸収は吸収系のネガエントロピーの減少をもたらす. この場合，ネガトンは負のネガエントロピー（負の情報）を運ぶはずである. ところが，放出は吸収に先行し（物体があたかも自発的に励起

され)，放出源のネガエントロピーの自発的な増加が起こる．つまり熱力学の第2法則に矛盾する過程が起こる．こうして，物理的にあまりはっきり定義されていない因果律の破れは，ネガトンによる熱力学の第2法則という定量的に厳密に定義された物理法則の破れ，という主張に置きかえられる．

普通，上述したような議論を根拠にして，負の質量の粒子ネガトンは存在しないという断定的な結論が導かれている*)．

特に，議論が熱力学の第2法則にではなく因果律に根拠をおいてなされる場合は，この禁止はまったく《自明》なものとされる．しかし，因果律が第2法則の直観的に自明な表現にすぎないことを認めれば，ネガトンの禁止に関する《自明性》は，物理的基礎を失ってしまう．

実際，第2法則は，われわれを取りまく巨視的現象を支配する統計的な法則であり，その法則からの個々のゆらぎ現象によるずれは統計力学によって許されるものである．個々のゆらぎにより，第2法則を破るような現象は許容されるから，ネガトンがなにかの原因でゆらぎ型の過程だけに現われるのであればそのことを第2法則は禁止できない．

こうして，因果律に基づく議論はネガトンの絶対的禁止の論拠とみなせない．だが，ネガトンは，ゆらぎ現象においてのみ熱力学の法則を破っているのだろうか．もっと本質的なことは，もしそのような破れが存在すれば，それは物理的に正当化されるだろうか．これらの疑問を解明する必要がある．

§29. 負の質量と熱力学の法則

ネガトンの存在を仮定することは，物理系が任意に大きな正のエネルギーをとりうるだけでなく，下限で制限されない任意に小さい負のエネルギーをとりうることを仮定する．しかし，ネガトンを含む系のこのような性質は，熱力学の公理の1つ——熱平衡状態が存在することの要請——と矛盾する．この要請によれば，あらゆる熱力学的な系は熱平衡状態をもたなければなら

---

*) 同様にして，タキオンの存在も否定されている．

ない．つまり，その状態においてすべての巨視的パラメーターは不変であり，また外部からの補足的な作用なしには，系はその状態から自発的に離れることはできない．ところが，このような平衡状態はすべての物理系において可能なのではない．熱力学と統計力学においては，エネルギースペクトルに下限があるような系，すなわち温度ゼロで達せられる最小エネルギーをもつような系のみが考察される．このような系は熱平衡状態にありうる．熱力学によれば，最小エネルギーをもたない系は，平衡状態に近づこうとしてますます低いエネルギー準位に遷移していき，つねに非平衡状態にあり続ける．統計力学によれば，ネガトンを含む系のように，下限のないエネルギースペクトルをもつ系は，その状態和

$$Z=\sum_k e^{-E_k/\Theta} \tag{29.1}$$

が収束しないから熱平衡状態に存在し得ない．ここで，$\Theta=kT$，k はボルツマン定数であり，T は系の絶対温度，E_k は系のエネルギー準位を表わす．

こうして，ネガトンの存在を仮定することによって，熱力学の法則の破れをゆらぎ現象だけでなく，巨視的なスケールにおける破れの可能性をも認めることになる．もちろん，熱力学の法則が絶対に破れないという立場にたって，ネガトンの存在と熱平衡状態の存在とが両立し得えないことを，ネガトンの存在を禁止する論拠とみなすこともできよう．しかし，統計物理学の基礎にある，熱力学の法則は絶対的な性格をもたず，力学系の統計理論の帰結にすぎないというアトミズムの概念のほうが，上記の観点よりもはるかに広い見解であろう．この概念によれば，熱力学の法則の破れはゆらぎの現象だけでなく，特殊な型の力学的微視系においては，巨視的スケールで系統的に起こりうる．ただ，地上での日常の経験に現われる通常の巨視的な系においては，熱力学の法則が目立つほど破れていないことを保障しなければならない．

ネガトンが存在する自然界において，ポジトンから成る系の《準平衡性》は，もしネガトンがポジトンと重力を通してのみ相互作用をしており，他の

型の相互作用（強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用）は，ポジトンとネガトンのあいだには，まったく存在しないと仮定すれば，存在可能である．そうすれば，ポジトンから成る任意の系は，実質上，ネガトンから断熱的に孤立していると考えてよいから，熱平衡状態に存在すると考えてよい．平衡はポジトン系とネガトン系とのあいだでの《重力量子》の交換によってのみ破られうる．しかし，そのような過程はきわめて小さい確率でおこり，目立つ程の効果にはなり得ない．

もし，上述したように，ネガトンとポジトンとのあいだに重力相互作用だけが存在すれば，ネガトンは，それらの大きな集積によって創られた重力場の宇宙的スケールでの現象においてのみ観測可能となろう．

ポジトンとネガトンのあいだに，すべての既知の相互作用（強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用および重力相互作用）が存在するという，もっと自然な仮定を検討することは重要である．この仮定を受け入れ，また（§27で考察したように）ネガトンは宇宙空間に非常に小さな密度で分布しているとすれば，ポジトンとネガトンの相互作用の過程だけを考えるとき，地球上の条件では，熱平衡状態の存在の要請が目立つほど破れる現象は起こらないはずである．ネガトンの密度が10^{-6}個/cm^3というような小さい値では，ネガトンは通常の物質と相互作用しても，地球上の条件では宇宙線より目立つ巨視的効果は現わさず，熱平衡の要請の破れは観測困難な効果となろう．

ところが，ポジトンとネガトンのあいだにすべての型の相互作用が存在するという仮定は，ポジトンとネガトンの多重生成の過程の可能性を考えるとき，困難に遭遇する．通常の場の量子論に基づく議論によれば，真空，つまり無から直接2個以上のプラス粒子と，2個以上のマイナス粒子が同時に生成される過程は許容される．この過程自体はネガトンの存在ほど奇妙なものではない．しかし，場の量子論の通常の議論によれば，摂動論の枠組内で，真空からのこのような多重生成過程の確率は，生成される粒子の数と共に増

大する[*]. したがって，恒星とか銀河のように膨大な数の粒子を含む宇宙的対象の生成確率はきわめて大きくなり，このような過程は非常に頻度の大きい事象になってしまう.

しかし，ネガトンにすべての型の相互作用を付与することに対するこの異議は，最初に感じられるほどラジカルなものではない．実際，この反論は，現在の場の量子論が内包する新たな発散の指摘，あるいは現在の理論の不完全さのもう1つの確証とみなすことができる．正のエネルギーと質量に対して構成された現在の場の量子論からはネガトンという対象はよそものであるが，それを導入することによって場の量子論の内部矛盾がこのように鋭く現われる事実は，そんなに驚くべきことではない.

上述した発散は，たとえば，ネガトンの世界のエントロピーは増大せず減少すると仮定すれば，容易に除去できる．すなわち，ネガトンの巨視的時間は，それを記録する通常の巨視的時計の時間に関して逆に流れている，とするのである．この場合，ある点におけるネガトンの同時生成の確率は，これらの粒子が1点に同時に集積される確率として計算できる．これは非常に小さな確率をもって起こる現象である．このような事情を考慮に入れると，N個のポジトンとN個のネガトンの集合の多重生成の確率は，同じ個数の粒子の集まりが一度に消滅する確率にほかならない．したがって，ポジトンとネガトンが真空から多重生成される過程は，巨視的な規模でのカタストロフィー的な平衡の破れをもたらさない．それどころか，ポジトンの世界とネガトンの世界においては時間の流れの方向が異なるという仮説は，明らかに場の量子論の根本的な再構築をもたらすことになろう.

こうして，ネガトンとポジトン間にすべての既知の相互作用が存在するという仮定も除外されていないとする．この仮説を認めることによって明らか

---

[*] ポジトンとネガトンの間にすべての型の相互作用が存在するという仮定に対するこの反論は1964年，コロンビア大学でのセミナーにおいて著者が行なった講演のディスカッションの中でT.D. Leeが指摘したものである.

に古典熱力学の巨視的な破れの可能性を許容し，同時に新しい熱力学の構築の必要性を認めることになる．その新しい熱力学からは，下限があるエネルギースペクトルをもつような狭いクラスの系において成り立つ古典熱力学が，特殊な場合として導き出せなければならない．

最大の困難は，おそらく，ネガトンとポジトン間の電磁相互作用が存在するという仮定に関連したものだろう．電荷をもつネガトンは，非常に奇妙な性質をもつだろう．ネガトンはポジトンからなる通常の物質を通過して，電子や原子核とクーロン相互作用の結果，エネルギーを連続的に失い，加速される．そして，ネガトンが通過する媒質は加熱される．このように，ネガトンの数が十分多ければ，ネガトンからなる熱浴のエネルギーを減少（冷却）させることによって連続的に仕事を行なわせて，古典熱力学で禁止されている第２種の熱機関のような働きをするエネルギー源が実現できるはずである．

もちろん，このような第２種の熱機関は，通常の物質と強い相互作用あるいは弱い相互作用をするネガトンによっても実現できる．だが，この場合は，エネルギーの発生過程は，ネガトンとポジトンの衝突の断面積が非常に小さいために，きわめてゆっくり進行する．ところが，電磁相互作用の場合には，荷電粒子が原子を通過するとき何度も電離化現象を起こすから，ネガトンからポジトンへのエネルギーの伝達は非常に速かに起こる．この種の過程は，日常の経験では観察されていないから電荷をもったネガトンは存在しないかあるいは，われわれをとりまく空間中には非常に少なく，それらの生成確率はきわめて小さい，と仮定することは自然である．では，ポジトンと強い相互作用と弱い相互作用をするネガトンについてはどうであろうか．それらによる，第２種の熱機関が存在しないという禁止則の破れは，宇宙的なスケールでの現象においてのみ顕著になり得，地球上での巨視的な実験ではほとんど観測にかからないだろう．

通常の物質と相互作用するネガトンの存在を仮定することから導かれた上述の結論がいかに奇妙なものであろうと，物理学者は古典熱力学が巨視的ス

ケールで破れることはあり得ないというアプリオリな確信だけに基づいて，これらの可能性を否定することはできない．

§30.　ネガトンの検出

すべての既知の粒子検出装置は，だいたい，つぎのように作用していると言える．まず外部から装置に入射する粒子は，エネルギーを全部あるいは部分的に失う．その分だけ粒子は装置にネガエントロピーを付与するので装置系は，準安定な平衡状態（あるいは力学的準平衡状態）からずれることになる．その結果，巨視的に観測可能な効果をもたらすなだれ型の非可逆過程が生じる．このような方式で作動しているものに，ウイルソンの霧箱，電離箱，ガイガー計数管，チェレンコフ計数管，原子核乾板等がある．もし，ネガトンが外部から装置に入射してきて，吸収されたり減速されたりしても，明らかにこれらの粒子は装置を作動できない．実際，ネガトンが装置に吸収されてもそれにエネルギーを与えるのではなく，逆にそれから受け取ることになる．したがって，ネガトンはポジトンが吸収されるときのように，装置を作動するのに必要なネガエントロピーを付与しない．

放出されたネガトンは，ポジトンが吸収されるとき装置に付与するのと同じエネルギーを付与するから通常の型の装置は，ネガトンの吸収ではなく装置からの放出を記録することになる．また，装置に入射するネガトンの速度が増大するような過程が記録されるだろう．たとえば，電荷を帯びたネガトンはウィルソンの霧箱を通過しながら凝縮の中心に電離現象を生じさせる．そして各電離過程でエネルギーを与えながらも，その速度を増す．このようなネガトンの残す飛跡は逆方向に運動しているポジトンの残す飛跡と区別することができない．したがって，地球から飛び出て霧箱の下方から入射する荷電ネガトンは，宇宙空間からやってきて上方から入射するポジトンとまったく同じ飛跡を残す．それゆえ，地球の内部で生成され物質中のポジトンとの衝突過程で加速された荷電ネガトンが，地球から飛び出し霧箱で記録され

るとすれば，それは宇宙からやってきて地球の物質によって減速された荷電ポジトンとまったく同様に記録される.

ところが，前節で明らかにしたように，このような荷電ネガトンはまったく存在しないかあるいはなにか未知の原因により，それらの生成確率はきわめて小さいと考えられる．もしそうでなかったら，これらの粒子による熱力学の破れは目立った効果を与えるはずである.

電荷を帯びていないネガトンがひとりでに加速される過程は可能であるが，当然ウィルソンの霧箱のような装置では記録できない．ただ計数管のような装置の活性部分によって自発的な放出が起こったときには装置は作動しネガトンを記録し得る．すでに存在するネガトンを捕えて検出するには，この種の型の装置は適当ではない.

ネガトンを検出するための装置は，粒子のエネルギーの付与によってではなく，装置の活性部分のエネルギーの減少によって（すなわち，ポジトンの放出と同等な過程の結果）作動する必要がある．したがって，そのような装置は（最も低い準位ではなく）最初に中間的な準位に存在するような系を含み，それがネガトンを吸収して負のエネルギーを受けとってはじめて，より低い準位に移行しうるようなものでなければならない．より低い準位への移行後，系において，《記録》を可能にさせる巨視的な非可逆過程が自発的に起こりはじめ，系はこれら2つの準位よりももっと安定な第3の状態に移行しなければならない.

このような過程は，負の温度の状態にある系で起こりうる．実際，そのような系では《励起》は正の温度をもつ通常の系のように，より高いエネルギー準位へではなくより低いエネルギー準位への遷移を意味するから，高いエネルギー準位ほど大きな安定性をもっている.

このように，ネガトンの吸収を記録する装置は原理的に可能である.

§31. タキオンと熱力学の第2法則

超光速で運動している虚の固有質量をもつ粒子タキオンは，実在の対象とは考えられない，とされている．そのような粒子の放出と吸収は，放出系の吸収系に及ぼす影響が超光速で伝播することを意味するからである．そして超光速による信号の伝播は，因果律に矛盾するとされている．相対性理論によれば，放出・吸収の事象は空間的間隔で隔たっているので，放出（原因）の時刻が吸収（結果）の時刻よりも遅くなるような基準系を選べるからである．しかしながら，§22で明らかにしたように，このような議論によってタキオンの存在が絶対的に禁止されるのは，因果律を絶対的な物理法則とみなせるときだけである．ところが，物理学の見地からは因果律は熱力学の第2法則のなんらかの表現，あるいは帰結である．したがって，ネガトンについて行なったあの議論を適用すると，「タキオンは信号化に用いられる対象としては禁止されるが，巨視的な過程に対して系統的な性格をもつ熱力学の第2法則を破らないで，ゆらぎ型の過程では現われることができる」と言える．

タキオンの放出と吸収過程において，もし放出と吸収過程の確率が等しければ，熱力学の第2法則は破られないことは容易に分る．この場合，信号を発振する系と受信する系とを区別することはできず，作用の伝達は系統的な性格も方向性ももっていないため，一般的に信号化は不可能である．

もし空間が電荷を帯びないタキオンで等方的に満たされており，またそれらがブラディオン（通常の粒子）の固有質量を変えないで，ブラディオンによって吸収・放出される*)とすれば，明らかに吸収・放出の確率は等しくなる．この場合，たとえば図14，図15からわかるように放出・吸収過程は時間に関して完全に対称的であり，基準系の移行によって，吸収過程は放出過程に変化し，その逆も起こるから一般に同一である．したがって，この場

*) §26で示したように，ブラディオンが固有質量を変えないでエネルギーと運動量だけを変えてタキオンを放出する過程は可能である．しかし，固有質量を変えないでブラディオンを放出する過程は起こり得ない．

合，タキオンの吸収・放出は系全体のエントロピーの変化を伴なわず，そのため第2法則は破られない．

あらゆる信号は，情報（すなわちネガエントロピー）を運ばなければならないが，このようなタキオンはネガエントロピーを運ばないので信号としては用いられない．

さて，もしタキオンを放出するブラディオンが，その固有質量，電荷やスピンなどの内部自由度を変えて他のブラディオンに転化しうるとすれば状況はすこし異なってくる．このときは，時間に関する対称性は破れ，放出・吸収過程の確率が等しいという主張はその根拠を失う．

しかし，もしタキオンの放出・吸収過程が孤立して起こるのではなく，タキオンがブラディオン A により放出されブラディオン B により吸収され，それにより A は B に，B は A に転化する過程によって起こるとすれば対称性はふたたび回復する．このような過程は，物理的には2つの素粒子が**仮想粒子**により互いに運動量，電荷等を交換するという周知の過程である．

こうして，場の量子論に現われる仮想粒子は虚の固有質量をもった物理的実在の粒子と考えることができる．このような粒子の導入は，熱力学の第2法則を破らず，したがって，それによって巨視的な因果律も破られない．

§26の終わりで示したように，タキオンは正のエネルギーか負のエネルギーをもちうる．したがって，タキオン存在の仮定はネガトンの場合のように，巨視的なスケールでの熱力学の法則の必然的な破れを伴なわない．熱力学の法則は，負のエネルギーをもつタキオンは禁止し，正のエネルギーをもつタキオンだけを許せば巨視的には破られない．

§32. タキオンは検出できるか？

すでにみたように，タキオンはネガエントロピーを運ばず，したがって信号としては用いられない．それゆえ，これらの粒子は一般に記録不可能であり，観測不可能な対象と考えられている．

ところが，ネガトンの例ですでに示したように，通常の装置では記録不可能であるが，原理的に新しい計測装置によって記録できる対象が存在する．したがって，タキオンを記録できるような特殊な計測系がありうるかどうかを検討する必要がある．

タキオンの吸収・放出の系統だった記録は熱力学の第2法則の破れをもたらすことになるので，タキオンを所定の点で記録するような装置については断念しなければならない．もちろん，このことは所定の点においてタキオンの何らかの作用を観察する可能性を断念することを意味しない．なぜなら，熱力学の第2法則の破れを伴なうタキオンのゆらぎ的な集積は禁止されておらず，それによって通常の型の記録装置を作動させ得るからである．しかし，それは通常の意味での粒子の記録とは異なる．

所定の点においてタキオンを記録するような装置が除外されるとしても，ある点における粒子の放出と他の点での吸収という過程を1つのまとまった現象として記録するような装置は可能であろう．たとえば，もしタキオンが電荷を帯びているとすれば，ブラディオン A による放出とブラディオン B による吸収の過程は，原子核乾板で，粒子 A がタキオン放出以前につけた飛跡と粒子 B がタキオン吸収後につけた飛跡によって記録される．言いかえれば，荷電粒子と中性粒子とのあいだでタキオンによって電荷を交換する過程（すなわち通常，仮想粒子による交換過程と考えられている過程）は記録可能である．

したがって，タキオンは原理的には観測可能である．だが，そのためには，このような粒子の放出と吸収過程を同時に記録するような特殊な型の装置と特別な実験を考え出さなければならない．

§33. 負の質量と負の温度

よく知られているように，エネルギーが有限な最小値と有限な最大値をとるような系（すなわちエネルギースペクトルの下限と上限が存在するような

系）は，負の絶対温度の平衡状態に存在することができる*)．実際，有限なエネルギースペクトル

$$E_{\min} < E_n < E_{\max} \qquad (33.1)$$

をもつような系に対しては，(29.1) の状態和は $\Theta>0$ のときも，$\Theta<0$ のときも収束する．したがって，系には平衡なカノニカル分布

$$W(E_n) = Ae^{-\frac{E_n}{\Theta}} \qquad (33.2)$$

が $\Theta>0$ に対しても，$\Theta<0$（すなわち負の温度 $T=\Theta/k$）に対しても存在する．というのは，どちらの場合も状態和が収束することから規格化条件

$$\sum_k W(E_k) = AZ = 1 \qquad (33.3)$$

が満たされるからである．

負の温度の準平衡状態は 1951 年，E.M. パーセルと R.V. パウンドによって (33.1) の条件を満たすスピン系に対して実験的に発見された [12].

ポジトンから成る系に対しては，粒子の運動エネルギーがいくらでも大きな値をとりうるから系のエネルギー E_n は最小値 $E_{\min}$ 以上の任意に大きな値をとりうる．すなわち，

$$E_{\min} \leq E_n < +\infty. \qquad (33.4)$$

このような系に対しては，$\Theta<0$ のとき状態和 Z が発散するので規格化条件 (33.3) は満足されないことになり，したがって Θ は負ではあり得ない．それゆえ，(33.4) の条件が満たされるときは，Θ は正値だけをとり得る．ところがネガトンの場合，明らかに，

$$-\infty < E_n \leq E_{\max} \qquad (33.5)$$

であり，したがって分布 (33.2) は $\Theta<0$ のとき，すなわち負の絶対温度においてのみ意味をもつ．それゆえ，ネガトンから成る系は負の絶対温度におい

*) 厳密にいえば，この系は準平衡状態にある．なぜならどんな系も，エネルギースペクトルの上限をもたないため，負の温度では平衡状態に存在し得ない周囲の物体から完全に孤立することはできないからである．

てのみ熱平衡状態に存在しうる. この問題は V. Visin の論文 [25] でも詳しく論じられている.

容易にわかるように, ネガトンと相互作用するポジトンを含むような系の場合は, (33.2) は平衡分布にはなり得ない. このような系はエネルギーが下限も上限ももたず, したがって (33.2) の確率のすべての状態による総和は (A のゼロ以外の任意の値に対して) 発散してしまうから, 一定温度の熱平衡状態には存在し得ない. このような系は, ポジトンを含む部分系が正の温度で特徴づけられる内部平衡状態に存在し, ネガトンを含む部分系が負の温度をもつような準平衡状態だけが可能である. このような部分系間の相互作用により, 各部分系の温度は変化するので全体の系は一般的に平衡ではなくなる. しかし, もしこの相互作用が非常に弱ければ, 平衡の破れはきわめてゆっくり起こり, 各部分に対して平衡熱力学を用いることができる.

こうして, 負の質量の粒子から成る系は, もし正の質量の粒子から成る通常の系と十分弱い相互作用をしていれば, 熱力学的な観点からは負の温度をもつ系として考えることができる.

§34. ネガトンと宇宙線

§27 において, 宇宙は一様な密度 10^{-30} g/cm^3 のネガトンと恒星, 惑星, 恒星間ガスなどの宇宙的な対象物の形で集積されたポジトン粒子で満たされており, 平均してゼロの固有質量をもつような宇宙モデルを検討した. もし, ネガトンがポジトンと重力相互作用, 弱い相互作用および強い相互作用をしているとすれば*), それらはポジトンから成る系とは弱く相互作用する準孤立系と考えることができる. このような系は, 負の温度において準平衡状態にあり得る. それゆえ, いま考察しているモデルでは, 宇宙は空間的に不均一に分布し正の温度をもつポジトンの系と, 空間的にほぼ一様な分布をもち, 負の温度状態にあるネガトンの系から構成されていると考えられる.

---

*) §29 の終わりで述べた理由で電磁相互作用は除外しておく.

熱力学でよく知られているように，負の温度状態にある熱浴があれば熱浴を連続的に冷却するだけで仕事を行えるような**第2種の熱機関**を実現できる．このような第2種の熱機関として実質上レーザーをあげることができる．レーザーは，あらかじめ負の温度状態におかれた準孤立部分系を冷却することによって強力な光束をつくるのである*)．

ネガトンから成る熱浴を用いると，やはり第2種の熱機関が実現できる．このような熱機関は有限の最小エネルギーをもたないので無限に温度を下げることにより，無限のエネルギーを与えることができるから，レーザーとは異なり無限の仕事を行なうことができる．したがって，ネガトンとポジトンから構成された宇宙では原理的に新しい，実質上つきることのないエネルギー源をもつ第2種の熱力学的永久機関が実現される．

こうして，電波銀河や準星の輻射のような一連の不可解な天体物理現象に対して，原理的に新しい説明の可能性が現われる．これらの対象はあまりにも膨大なエネルギーを放出するので核反応や熱核融合反応では説明できないほどである．また，星間あるいは銀河間の空間や，太陽のまわりでの宇宙線生成に関する新しい説明の可能性が現われる．このような可能性についてすこし詳しくみてみよう．

$f(E,\vec{r},t)$ をエネルギーと空間座標による相対論的な宇宙線粒子の分布関数とする．ρ_0^+ は，非相対論的なポジトン，つまり，通常の物質（星間ガスや惑星の物質とか恒星など）の空間密度であり，ρ^- はネガトンの空間密度としよう．宇宙線中の相対論的粒子は，ネガトンと衝突してネガトンの負の運動エネルギーを増加させることにより，その平均エネルギーを増加させる*)．

宇宙線中の粒子はネガトンと衝突して，平均して自分のエネルギー E の α

---

*) レーザーは第2種の熱機関であるが第2種の永久機関ではないことに注意すべきである．レーザーのエネルギー源である負の温度の部分系は，限られたエネルギーの貯えしかもたず，任意に低い温度への冷却に際して有限な仕事しか行なえない．

倍だけのエネルギーを単位時間当りに得るとする．つまり，粒子の平均エネルギー $\bar{E}$ は，方程式

$$\frac{d\bar{E}}{dt}=\alpha\bar{E} \tag{34.1}$$

にしたがって増大する，とする．ここで明らかに係数 α はネガトンの濃度，宇宙線粒子の速度およびポジトンとネガトンの弾性衝突の有効断面積 σ_{+-} に比例して

$$\alpha=n^{-}c\sigma_{+-} \tag{34.2}$$

とおける．ただし，$n^{-}=\rho^{-}/m^{-}$ はネガトンの濃度，m^{-} はネガトンの質量である．

宇宙線粒子の平均エネルギーの増加を伴なうこのような過程の結果，分布関数は方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial E}(\alpha Ef)=0 \tag{34.3}$$

にしたがって時間と共に変化する．実際，この方程式に依れば E と t だけに依存する関数 f に対して，

$$\frac{d\bar{E}}{dt}=\frac{1}{n^{+}}\frac{d}{dt}\int_0^\infty EfdE=\frac{1}{n^{+}}\int_0^\infty E\frac{\partial f}{\partial t}dE=-\frac{1}{n^{+}}\int_0^\infty E\frac{\partial}{\partial E}(\alpha Ef)dE$$
$$=-\frac{\alpha E^2}{n^{+}}f\Big|_0^\infty+\frac{\alpha}{n^{+}}\int_0^\infty EfdE$$

と書ける．ここで

$$n^{+}=\int_0^\infty fdE$$

は単位体積あたりの宇宙線粒子の平均個数，つまり平均密度である．ここ

---

*) ポジトンが静止している媒質のポジトンと衝突すると，媒質粒子の平均運動エネルギーが粒子の運動エネルギーより小さければ，(ポジトンが媒質にエネルギーを付与するため) そのエネルギーは減少し，その逆の場合には，増加する．ポジトンがネガトンから成る静止している媒質と衝突するときは，粒子の平均運動エネルギーはいずれの場合も増加する．

で，f は $E=0$ のとき有限であり，$E\to\infty$ で十分速くゼロに近づくとすれば(34.1)の方程式を得る．

空間-エネルギー密度 f は，宇宙線粒子が通常の物質と衝突することによってもやはり変化する．いま T を宇宙線粒子の行路の平均時間とすれば，関数 f は単位時間当りに $1/T$ 減少する．明らかに，

$$T=\frac{1}{n_0^+ c\sigma_{+0}} \tag{34.4}$$

が成り立つ．ここで，σ_{+0} は宇宙線粒子と非相対論的な物質粒子との衝突の全有効面積であり，また $n_0^+=\rho_0^+/m^+$．ただし m^+ は物質中のポジトンの平均質量である．

ところで，空間-エネルギー密度 f は星間磁場における，宇宙線粒子の通常の空間拡散によっても変化しうる．

これら2つの効果と最初の宇宙線源の存在を考慮するには，方程式(34.3)に3つの項を補足する必要があり，そのため宇宙線粒子の拡散を記述する空間-エネルギー方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t}-D\nabla^2 f+\frac{\partial}{\partial E}(\alpha E f)+\frac{f}{T}=Q \tag{34.5}$$

の形をとる．ここで，D は空間拡散係数であり，Q は最初の宇宙線粒子源の密度である．

論文[13–16]によれば，この拡散方程式は，E の2回微分に関する項を含んでおらず，エネルギーの拡散によるばらつきを考慮していない簡略化された方程式である．しかし，この方程式はフェルミ機構に類似した粒子の加速機構[17]を記述するには十分である．

この方程式の最も簡単な解は，空間的に一様で定常的な場合に求められる．それは最初の宇宙線源の最大エネルギーを越えるようなエネルギーに対して与えられた方程式

$$\frac{\partial}{\partial E}(\alpha E f)+\frac{f}{T}=0 \tag{34.6}$$

の解である．そのような解は，

$$f=AE^{-\gamma} \tag{34.7}$$

の形をとる．ここで A は積分定数である．また，

$$\gamma=1+\frac{1}{\alpha T}=1+\frac{n_0^+\sigma_{+0}}{n^-\sigma_{+-}}. \tag{34.8}$$

ネガトンは平均して十分大きな負の温度をもつと考えられる．ネガトンは宇宙線粒子からたえず負の運動エネルギーを獲得し，あまり高温度ではない惑星とか恒星などの密度の高い物質の形では集積されることはないと考えられるからである．したがって，すべてのメタ銀河に対して n^- はほぼ一定の値と考えてよい*)．こうして，係数 γ は銀河間空間で最小値をとり，星雲内部と恒星の近くでは増加する．

宇宙線がメタ銀河で発生するという仮説によって宇宙線の等方性の事実が説明できる．宇宙線の一次成分については $\gamma\simeq3$ であるから，この仮説は

$$\frac{n_0^+\sigma_{+0}}{n^-\sigma_{+-}}\simeq2 \tag{34.9}$$

と仮定することに相当する．

密度と断面積のあいだのこのような関係は，もしポジトンとネガトンの平均密度が，メタ銀河でほぼ等しく，有効断面積 σ_{+0} と σ_{+-} が同じオーダーの値であると考えれば，ごく自然なものとなる．

こうして，宇宙線が銀河間空間で生成されると考え，またネガトンの密度とネガトン-ポジトン間の相互作用断面積に関して最も簡単な仮定を置くことによって，宇宙線の一次成分の等方性とそのエネルギー・スペクトルが容易に説明される [18].

恒星の周囲では物質粒子の濃度 n_0^+ は増加するが，ネガトンの濃度 n^- が実

---

*) 負の温度ではボルツマン分布にしたがえば，$n^-\sim\exp(-m\varphi/kT)=\exp(-|m|\varphi/k|T|)$ であるから，ネガトンの密度は星の内部では増大する．ただし，φ はニュートンの重力ポテンシャルである．しかし，$|T|$ の値が大きければ，この増加はたいしたものではない．

質上一定であるとすれば，(34.8)によって係数γは増加する．このように太陽の近くでも，やはり宇宙線は生成されるであろうが，そのスペクトルはメタ銀河全体で生成される宇宙線のものよりももっとけわしい形をとるはずである．宇宙線粒子によって単位体積，単位時間あたりに獲得されるエネルギー(エネルギー発生強度)は，明らかに宇宙線粒子の濃度n^+と単位時間あたりの平均エネルギーの増加に比例する．それゆえ(34.1)によれば，

$$\frac{dW}{dt}=\alpha\bar{E}n^+ \tag{34.10}$$

と書ける．ただし，Wは宇宙線粒子のエネルギー密度である．

こうして，全ての空間領域において，係数αがほぼ一定ならば，エネルギー発生強度は宇宙線粒子の密度に比例して増加する．したがって，ある空間領域，たとえば超新星の付近で相対論的粒子の集積が起こったとき，この領域でのエネルギー発生は強まるだろう．

電波銀河の電波輻射を説明するには，なんらかの過程によって相対論的粒子の集積が起こり，その濃度が銀河間空間でのガスの濃度より，数オーダー程度大きいと仮定すれば十分である．そうすれば，与えられた時刻に，これらの粒子が電波銀河の磁場で電波放射するときの全体の強度は観測値に等しくなる．このようなエネルギーの発生は式(34.10)からわかるように，相対論的粒子とネガトンとの衝突によって一定に保たれる．実際，$n^-\sim10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $\sigma_{+-}\sim10^{-26}\,\mathrm{cm}^2$, $c=3\cdot10^{10}\,\mathrm{cm/sec}$とすれば，$\alpha\simeq3\cdot10^{-22}\,\mathrm{sec}^{-1}$を得る．さらに，$\bar{E}\sim10^{10}eV\simeq1.6\cdot10^{-2}\,\mathrm{erg}$, $n^+\sim10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-3}$とおけば，体積$10^{68}\,\mathrm{cm}^3$の電波銀河に対して，全体の発生強度として観測値と合う$5\cdot10^{41}\,\mathrm{erg/sec}$を得る．相対論的粒子の濃度を適当な程度まで増すと，発生強度はきわめて大きくなりうる．このように，上述した仮説によって準星の膨大なエネルギー発生を重力崩壊という疑わしい仮説にたよらず，まったく自然な形で説明することができる．

準星のエネルギー発生に関して同様な仮説を著者とは独立にB.ホフマン

が提唱している [20, 21]．彼は準星内部では，負の質量をもった大量のネガトンが生成されており，そのために正のエネルギーが発生すると仮定した．

参考文献

[1] A. Einstein, Ann. Phys., **17** (1905) 891

[2] H. Poincaré, Rend. Circolo Mat. Palermo, **21** (1906) 129

[3] L. I. Mandel'stam,「全著作集」, 第 V 巻, 《ソ連科学アカデミー》出版, (1950)

[4] H. Minkowski, Phys. Z. S., **10** (1909) 104

[5] H. A. Lorentz, Proc. Acad. Sci., Amsterdam, **6** (1904) 809

[6] R. V. Serebryany, J.E.T.P., **20** (1950) 1130

[7] Ya. P. Terletskii,「物理学の力学法則および統計法則」, 《モスクワ大学》出版, (1950)

[8] Ya. P. Terletskii,「統計物理学」, 《North-Holland》出版, アムステルダム―ロンドン, (1966)

[9] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329

[10] J. P. Terletsky, Journ. de Phys. et Radium, **21** (1960) 681, **23** (1962) 910

[11] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **117** (1928) 610 ; **118** (1928) 341

[12] E. M. Purcell and R. V. Pound, Phys. Rev., **81** (1951) 279

[13] Ya. P. Terletskii and A. A. Logunov, J.E.T.P., **21** (1951) 567

[14] A. A. Logunov and Ya. P. Terletskii, Izv. AN USSR, (Ser. Fiz.), **17** (1953) 119

[15] P. Morrison, S. Olbert and B. Rossi, Phys. Rev., **94** (1954) 440

[16] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **101** (1955) 59

[17] E. Fermi, Phys. Rev., **75** (1949) 1169

[18] J. P. Terletsky, Ann. Inst. H. Poincaré, **1** (1964) 431「準星源と重力崩壊」, 《シカゴ大学プレス》, シカゴ―ロンドン, (1965) p. 466

[19] O. Costa de Beauregard, Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science held in Jerusalem, Aug. 26–Sept. 2, (1966), 《North–Holland》出版，アムステルダム

[20] B. Hoffmann, Science Journal, April (1965) p. 75

[21] B. Hoffmann,「負の質量と準星」,「相対論と微分幾何の展望」に収録, 《インディアナ大学プレス》, (1966)

[22] S. Tanaka, Prog. Theor. Phys., **24** (1960) 171

[23] G. Feinberg, Phys. Rev., **159** (1967) 1089

[24] O.M.P. Bilaniuk, V. K. Deshpande and E.C.G. Sudarshan, American Journ. of Phys., **30** (1962) 718

[25] V. Visin, Phys. Letters, **2** (1962) 32; **3** (1963) 174; **13** (1964) 217

[26] V. A. Turakov, Vestnik Moscow State Univ., No. 1 (1968) 47

■付録■

星の集団の熱力学的安定性について

V. P. コルパコフ, Ya. P. テルレッツキー

Izv. Vysh. Uch. Zav. (Fizika), **6** (1976) 134

1. 星の集団のグローバルな振舞は，古典統計力学と熱力学の方法によってうまく記述できる．その理由は，星の集団は，十分な近似で星という《分子》からなる重力の働く理想気体系――実質上，互いに衝突をせず重力相互作用によってのみ相互作用をする質点系――と考えることができるからである．

このような星の集団が，統計力学と熱力学で扱われる理想気体と異なる点は，質点の質量が同一でないことと，――本質的なことであるが――最小エネルギーをもった状態がないことである．引力の働く質点系が最小エネルギーをもたないことの理由は次のようにして説明できる．第1に2個の質点が限りなく近づくと，その相互作用エネルギーはマイナスの無限大になること，第2に，有限の体積Vの空間内で質点が一様に分布している場合でも質点系の重力エネルギー（ポテンシャルエネルギー）U_gは，系の全質量をMとすると，$-GM^2V^{-1/3}=-G\rho^2V^{5/3}$に比例するので，エネルギー密度$U_g/V\sim-G\rho^2V^{2/3}$は，$V$の増加に伴って，限りなく減少しうるからである．[質量密度 $\rho=M/V$ はVの増加に伴って任意の，いくらでも小さな（有限の）値をとる.]

系のエネルギーに最小値が存在しないと位相積分

$$\Gamma(E)=\int_{(X)}\Theta\{E-H(X)\}\,dX \tag{1}$$

は発散する．ここでXは正準変数，Eはエネルギー，$H(X)$は系のハミル

トニアン，$\Theta(y)$ はヘビーサイドの単位ステップ関数（$y\geqq 1$ のとき $\Theta(y)=1$，$y<0$ のとき $\Theta(y)=0$）をそれぞれ表す．したがってこのような系には，熱平衡状態が存在せず，厳密には，平衡状態を扱う統計力学の方法は適用できない[1]．しかし，位相積分 $\Gamma(E)$ の発散の原因となる位相空間内の（星の集団系の存在時間内に）実質上到達できない領域を除外すれば，系は準平衡系と考えることができよう．このようにして，引き合うペアーの質点が接近することによるエネギルーの限りない減少が原因となって生じる発散を取り除いておく．また，体積の増加による重力エネルギー密度の限りない減少が原因となって生じる発散は，系の体積 V を人為的に制限するか，あるいはニュートンの万有引力に従う相互作用の法則を，たとえば湯川型の法則に変えることによって除去するしかない．後者の場合，体積が無限大であっても，密度 ρ が一定であれば系は有限のエネルギー密度をもち，熱平衡と考えることができる．

こうして，我々の考察する系は準平衡系であるとして，以下では上述した点を考慮して統計力学の方法を適用し，ギブスが発展させた熱力学の安定性の理論を用いて，系の安定性を調べることにする．

2.　互いに引き合う N 個の質点系のハミルトニアンが

$$H(X)=\sum_{k=1}^{N}\vec{p}_k^{\,2}/2m_k+1/2\sum_{(i\neq j)}\sum U(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

と表され，また重力相互作用のエネルギーは，自己無撞着な積分によって

$$U_g=G/2\iint\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}')\,K(|\vec{r}-\vec{r}'|)\,d\vec{r}\,d\vec{r}'$$

と表される（$K(R)$ は質点の相互作用の法則を記述する）とすれば，位相積分（1）は容易に計算できる．このような近似では第1種の発散の原因となる近接相互作用を考慮せず，したがって位相積分（1）は運動量空間における $3N$ 次元の楕円体の体積の計算に帰着される．系のエントロピーは $S=k\ln\Gamma$ と表されることから，初歩的計算により，

$$E(S,V)=3/2\,kNV^{-2/3}\exp\{(S-S_0)/(3/2\,kN)\}+U_g(V) \qquad (2)$$

を得る．《粒子》がもちうる補足的な自由度（例えば，回転，連星系の生成など）を考慮すれば，(2) は次のように一般化できる．

$$E(S,V)=C_V V^{1-\gamma}\exp\{(S-S_0)/C_V\}+U_g. \qquad (3)$$

ここで，$C_V=\nu/2\,k\,N$，ν は《粒子》の自由度，$\gamma=C_p/C_V=1+2/\nu<2$ である．《一原子気体》の場合，$\nu=3$，$\gamma=5/3$ である．

3. ギブスによれば，安定な平衡状態では，熱力学的ポテンシャルは極値をとる．したがって，《気体》球の半径方向の断熱的摂動に対して，エンタルピー $H(S,p)=E+pV$ は最小値をとらなくてはならない．それゆえ，平衡状態の体積 V から δV だけ体積が変化することによって生じるエンタルピーの変化は次の条件を満たす．

$$(\delta H)_{S,p}=[(\partial E/\partial V)_S+p]\delta V+1/2(\partial^2E/\partial V^2)_S\delta V^2>0.$$

これより，平衡の条件

$$(\partial E/\partial V)_S=-p$$

と《粒子》数が不変のときの安定性の条件

$$(\partial^2E/\partial V^2)_S>0$$

が導かれる．

(3) 式を用い，また有限系の境界では $p=0$ と仮定すると，球の半径方向に沿った断熱摂動に関する安定性の規準として

$$\gamma/V\cdot\partial U_g/\partial V+\partial^2U_g/\partial V^2>0 \qquad (4)$$

を得る．

等温（$\theta=$const.）での半径方向に沿った摂動に関する熱平衡の安定性の条件は，ギブスのポテンシャル

$$G(\theta,p)=E-\theta S+pV$$

が，θ,p,N を固定したとき δS と δV に関して最小値をとることから容易に導ける．結局，半径方向に沿った等温摂動に対する系の安定性の条件として

$$1/V\cdot\partial U_g/\partial V+\partial^2 U_g/\partial V^2>0 \tag{5}$$

を得る.

4.　次に，安定性が相互作用の法則にどのように依存するかを調べてみよう．《粒子》がニュートンの法則に従って相互作用する場合，$K(R)=-1/R$ であるから，$U_g=-\alpha GM^2V^{-1/3}$ となる．（α は，密度分布だけに依存する係数である.）(4) と (5) を用いると，周知の結果 [2, 3] が得られる．すなわち，有限な系 $\gamma>\gamma_{cr}=4/3$ であれば，断熱摂動に関して安定であるが，等温摂動に関しては不安定である.

ニュートンの万有引力の法則を湯川型の $K(R)=-\exp(-\kappa R)/R$（この法則は [4] で，$\kappa^{-1}=\Lambda\sim10^{21}$ cm の仮説的な負の質量の場による重力場の遮蔽を考慮して導かれたもの）に変えると，一様な球に対するポテンシャルエネルギーとして

$$U_g=-9/2\cdot GM^2/R\cdot1/\mu^2\{1/3-I_{3/2}(\mu)K_{3/2}(\mu)\}$$
$$=-2\pi GM^2\Lambda^2/V+GM^2 3\pi(4\pi/3)^{1/3}\Lambda^3/V^{4/3}-4GM^2\pi^2\Lambda^5/V^2+\cdots \tag{6}$$

を得る．ここで $\mu=R/\Lambda$, $R\sim V^{1/3}$, $I_{3/2}(\mu)$ と $K_{3/2}(\mu)$ は指数 3/2 の虚の変数の変形ベッセル関数を表す．安定性の規準 (4) を用いると，安定性の条件 $\gamma>\gamma_{cr}$ が得られるが，ニュートンの法則の場合の γ_{cr} の値よりも大きくなり，$4/3<\gamma_{cr}\leqq2$ となる．$R\gg\Lambda$ では，$\gamma_{cr}=2$ となり，星の集団は不安定となる.（このとき，ある値以上で不安定性が現れるある臨界値が存在する.）等温摂動に関しては，不安定性に変更は生じない.

5.　論文 [5, 6] で，B. A. ヴォロンツォフ－ヴェリヤノフは，観測されている銀河の多様な構造特異性は，ニュートンの万有引力だけに基づいては説明できない，という結論を導いている．論文 [7] で，我々は，銀河のらせん分岐の起源と湯川型の相互作用を仮定してこのことの説明を試みた．同様にして，銀河の他の構造特異性の起源も Λ より大きな規模での断熱的な不安定

性によって説明することができよう．たとえば，銀河が不規則な形状または構造を有し，臨界値を越える大きさをもっていれば縁周物質がテール（尾）の形でほうり出されるだろう．一方，臨界値以下の大きさの銀河の場合，このようなことは起こらないはずである．このことから，大規模銀河は構造特異性をもつが，小規模銀河にはそれがない，という結論が導けよう．これは，銀河の質量とそのらせん構造の大きさの関係（超巨大銀河には大きならせん構造が，また中規模の銀河には若干のらせん構造が観測されるが，小規模ではそのような構造はない）を指摘したヴァン・デン・ベルグ [8] の観測事実と合う．

参 考 文 献

[1] Ya. P. Terletskii,「第 VI 回宇宙進化の諸問題に関する会議の会議録」, モスクワ,《ソ連科学アカデミー》出版, (1959) p. 214

[2] D. Lynden-Bell, R. Wood, Mon. Not. RAS, **138** (1968) 495

[3] I.L. Genkina, L.M. Genkina,「銀河および恒星集団の力学」, アルマータ,《ナウカ》出版, (1973) p. 155

[4] Ya. P. Terletskii,「相対性理論のパラドックス」, モスクワ,《ナウカ》出版, (1966)

[5] B. A. Vorontsov-Velyaminov,「第 IV 回宇宙進化の諸問題に関する会議の会議録」, モスクワ,《ソ連アカデミー》出版, (1959) p. 19

[6] B. A. Vorontsov-Velyaminov, Astron. Journ., **41** (1984) 814

[7] V.P. Kolpakov, Vestnik Moscow State Univ. Fiz. Astron. **3** (1973) 270

[8] S. Van den Berg, IAV Symposium No. 38, Dordrecht, D. Reidel. (1970) p. 478

タキオンの生成と吸収反応の運動学

Ya. P. テルレッツキー

プレプリント JINR P2-11149, Dubna, (1977)

正の固有質量をもつ粒子（ブラディオン B, b ; $M_B>0$, $M_b>0$), または固有質量が 0 の粒子（ルクソン Λ ; $M_\Lambda=0$）の生成または吸収反応

$$B' \leftrightarrows B+b, \quad B' \leftrightarrows B+\Lambda \tag{1}$$

は, 相対論的なエネルギー・運動量保存則によって $M'>M$（M' と M は, それぞれ粒子 B' と B の固有質量. $M'=M_{B'}$, $M=M_B$）のときに限って許容される.

しかし, 虚の固有質量をもった超光速粒子（タキオン T ; $M_T=i\mu$, $\mu^2>0$ [1-5]）の同様な生成または吸収反応

$$B' \leftrightarrows B+T, \quad B' \leftrightarrows \Lambda+T \tag{2}$$

は, $M'<M$, $M'=M$, $M'=0$ または $M=0$ のとき運動論的に許容される. 特に興味深いのは $M'=M$ の場合, すなわち固有質量の変化を伴わない, 通常の粒子によるタキオンの放出と吸収の可能性である [1, 3, 6].

上述したすべての可能性を詳しく見てみよう.

いま, 質量 M の粒子が, 質量 $M_T=i\mu$ のタキオンを吸収して質量 M' の粒子に転換するとしよう.

エネルギー・運動量保存則：

$$E'=E+E_T, \quad \vec{P}'=\vec{P}+\vec{P}_T$$

および固有質量の定義

$$M'^2c^2=\left(\frac{E'}{c}\right)^2-\vec{P}'^2, \quad M^2c^2=\left(\frac{E}{c}\right)^2-\vec{P}^2,$$

$$M_T^2c^2=\left(\frac{E_T}{c}\right)^2-\vec{P}_T^2=-\mu^2c^2$$

より，次の関係式が容易に得られる．

$$M'^2c^2=M^2c^2+M_T^2c^2+2\left(\frac{E_TE}{c^2}-\vec{P}_T\vec{P}\right). \tag{3}$$

ここで，タキオンを吸収する前の（質量 M の）粒子は静止していると仮定しよう．すなわち，$\vec{P}=0$, $E=Mc^2$ とすると，

$$E_T=\frac{c^2}{2M}(M'^2-M^2+\mu^2)\,. \tag{4}$$

$E_T=E'-Mc^2=\varDelta E$ は，タキオンから，タキオンを吸収した粒子に伝えられるエネルギーの意味をもつことに留意すると，(4) は次のように書ける．

$$\frac{\varDelta E}{Mc^2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{M'}{M}\right)^2+\left(\frac{\mu}{M}\right)^2-1\right\}. \tag{5}$$

負エネルギーのタキオンの関与する反応を除き，$E_T>0$ とすると，関係式 (4) から，種々の E_T と μ/M の値に対して許容反応のタイプを決めることができる．記号

$$\varepsilon=\frac{c^2}{2M}\mu^2, \quad E_0=\varepsilon-\frac{Mc^2}{2}=\frac{c^2}{2M}(\mu^2-M^2) \tag{6}$$

を導入しよう．

$\mu<M$ であれば，次のような M' と M の質量関係が可能となる．

a）　$0<E_T<\varepsilon$ のとき，$\sqrt{M^2-\mu^2}<M'<M$

b）　$E_T=\varepsilon$ のとき，$M'=M$　　(7)

c）　$E_T>\varepsilon$ のとき，$M'>M$．

$\mu>M$ であれば，次の質量関係が可能である．

A）　$0<E_T<E_0$ のとき，$M^2-\mu^2<M'^2<0$

B）　$E_T=E_0$ のとき，$M'=0$

C）　$E_0<E_T<\varepsilon$ のとき，$0<M'<M$　　(8)

D）　$E_T=\varepsilon$ のとき，$M'=M$

E）　$E_T>\varepsilon$ のとき，$M'>M$．

c）と E）の場合，すなわち $E_T>\varepsilon$ の場合に限って，タキオンの吸収と放出反応は，$M'>M$ の場合のブラディオンとルクソンの吸収と放出反応 (1) と同様に進行しうる．

a）と C）の場合は，これらの反応は $M'<M$ のときに進行する．すなわち，タキオンを吸収した系は，普通の場合のように質量を増加させるのではなく，固有質量を減少させることになる．

b）と D）の場合，すなわち $E_T=\varepsilon$ であれば，タキオンを放出したり吸収したりした粒子は固有質量を変えない．こうして，タキオンを放出あるいは吸収した粒子（ブラディオン）は，自己のエネルギーを ε だけ飛躍的に変えるが，他の粒子に転化することなくそれ自身であり続ける．

もちろん，このような過程は，他の保存則が満たされるとき，すなわちタキオンのスピンが 0 であり，電荷などの何等チャージをもたない，という条件が成り立つ場合に限って起こり得る．

$E_T=E_0, M'=0$ の B）の場合，タキオンを吸収したブラディオンは，ルクソンに転化し，反応

$$\Lambda \leftrightarrows B+T \tag{9}$$

が起こり得る．

最後に，$0<E_T<E_0$ が成り立つ A）の場合，タキオンを吸収したブラディオンはタキオンに転化し得，

$$T' \leftrightarrows B+T \tag{10}$$

の型の反応が起こり得る．

《エキゾチックな》反応 (9) と (10) は，$\mu>M$ が満たされるときにのみ許容されることに注意したい．

上述した結果は，(4) の E_T の式ではなく，無限大の速度で運動し，エネルギー $E_T=0$ と最小の運動量 $P_T=\mu c$ をもつタキオンを吸収する粒子の運動量 P に対する式から導くことができる．

(3) 式より，$\vec{P}/\!/\vec{P}_T$，$P_T=\mu c$，$E_T=0$ である基準系では，

$$P=-\frac{c}{2\mu}(M'^2-M^2+\mu^2) \tag{11}$$

が成り立つ.

$\mu<M$ であれば，(11) より次の関係を得る.

a） $-\frac{\mu c}{2}<P<0$ のとき，$\sqrt{M^2-\mu^2}<M'<M$

b） $P=-\frac{\mu c}{2}$ のとき，$M'=M$ (12)

c） $P<-\frac{\mu c}{2}$ のとき，$M'>M$.

$\mu>M$ であれば，次の関係が得られる.

A） $\frac{c}{2\mu}(M^2-\mu^2)<P<0$ のとき，$M^2-\mu^2<M'^2<0$

B） $P=\frac{c}{2\mu}(M^2-\mu^2)$ のとき，$M'=0$

C） $-\frac{\mu c}{2}<P<\frac{c}{2\mu}(M^2-\mu^2)$ のとき，$0<M'<M$ (13)

D） $P=-\frac{\mu c}{2}$ のとき，$M'=M$

E） $P<-\frac{\mu c}{2}$ のとき，$M'>M$.

結局，(12) と (13) は，(7) と (8) と同じことを表している.

これらの関係は，タキオンを吸収して新しい粒子を生成する過程が可能となるような，粒子（ブラディオンとタキオン）のエネルギーと運動量を規定するものである．もちろん，チャージ，スピンなどの保存則から導かれる制限についても考慮する必要がある.

参 考 文 献

[1] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329

[2] S. Tanaka, Prog. Theor. Phys., **24** (1960) 171

[3] J. P. Terletsky, Journ. de Phys. et Radium., **21** (1960) 681

[4] O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan, American Journ. of Phys., **30** (1962) 718

[5] G. Feinberg, Phys. Rev., **159** (1967) 1089

[6] Ya. P. Terletskii,「相対性理論のパラドックス」，モスクワ，《ナウカ》出版，(1966)

運動学的に許容されたタキオンの生成と吸収反応

Ya. P. テルレッツキー

「重力と電磁気」，ミンスク，《BGU》出版，(1981)

1. 多くの物理学者がいだく超光速粒子，タキオンに対する（その存在の可能性をアプリオリに拒絶するという）偏見は，アインシュタインの光速不変の要請をもっと明瞭な「光速極限の原理」に置き換えた，1940 年代になされた新しい記述と関連があると思われる．言い換えると，超光速信号による因果律の破れの可能性を述べた，1907 年のアインシュタインの定理 [1]が，エネルギーを伝達する，任意の（超光速粒子も含めて）超光速過程のアプリオリの禁止に，知らないうちに取って換えられたのである．

1960 年以降，一連の論文 [2-7] で，超光速粒子存在の仮定が相対性理論の要請に矛盾しないことが示され，虚の固有質量をもつ粒子タキオンの多くの性質が理論的に研究されてきた．以下で，エネルギー・運動量の保存則で許容された，タキオンの生成と吸収反応を見てみよう．その際，チャージ，スピンなどの保存則による禁止は考慮しない．また，タキオン存在を否定する論拠としてよく使われる《反電話のパラドックス》についても考えてみる．

2. 正の固有質量をもつ粒子（ブラディオン B, b；$M_B>0$, $M_b>0$），または固有質量 0 の粒子（ルクソン Λ, $M_\Lambda=0$）の生成・吸収反応：

$$B' \leftrightarrows B+b, \quad B' \leftrightarrows B+\Lambda \tag{1}$$

は，$M'>M$（M' と M は，それぞれ粒子 B', B の固有質量：$M'=M_{B'}$, $M=M_B$）のときのみ，エネルギー・運動量保存則によって許容される．しかし，虚の固有質量をもつ超光速粒子（タキオン T；$M_T=i\mu$, $\mu^2>0$ [2-8]）

の同様な生成・吸収反応

$$B' \leftrightarrows B+T, \quad B' \leftrightarrows \Lambda+T \tag{2}$$

は，$M'<M$, $M'=M$, $M'=0$ または $M=0$ のとき運動学的に許容される．このうち，$M'=M$ の場合――粒子（ブラディオン）が固有質量を変えないでタキオンを放出・吸収する場合 [2, 4, 7] ――が特に興味深い．これらの可能性を詳しく見てみよう．

いま，正の質量 M をもった粒子が，質量 $M_T=i\mu$ のタキオンを吸収して，質量 M' の粒子に転化したとする．

エネルギー・運動量保存則：

$$E'=E+E_T, \quad \vec{P}'=\vec{P}+\vec{P}_T$$

および固有質量の定義*)

$$M'^2=E'^2-\vec{P}'^2, \quad M^2=E^2-\vec{P}^2, \quad M_T^2=E_T^2-\vec{P}_T^2=-\mu^2$$

より容易に

$$M'^2=M^2+M_T^2+2(E_TE-\vec{P}_T\vec{P}) \tag{3}$$

が得られる．

質量 M の粒子は，タキオンを吸収するまでは静止している（$\vec{P}=0$, $E=M$）とすれば，

$$E_T=\frac{1}{2M}(M'^2-M^2-M_T^2)=\frac{1}{2M}(M'^2-M^2+\mu^2) \tag{4}$$

$E_T=E'-M=\Delta E$ は，タキオンから，それを吸収した粒子に伝達されたエネルギーを表すことを考慮すると，(4) 式は，

$$\Delta E=\frac{M}{2}\left\{\left(\frac{M'}{M}\right)^2+\left(\frac{\mu}{M}\right)^2-1\right\} \tag{5}$$

と書ける．

負エネルギーのタキオンの反応は除いて，$E_T>0$ とすれば，(4) 式から，E_T と μ/M の種々の値で許容された反応のタイプを決めることができる．こ

*) これ以降，$c=1$ とする．通常の単位系に移行するには，$E\to E/c$, $M\to cM$ と置き換えればよい．

こで，記号

$$\varepsilon=\frac{\mu^2}{2M},\quad E_0=\varepsilon-\frac{M}{2}=\frac{1}{2M}(\mu^2-M^2) \tag{6}$$

を導入する．

$\mu<M$ であれば，次のような M' と M の間の質量関係が得られる．

a） $0<E_T<\varepsilon$ のとき，$\sqrt{M^2-\mu^2}<M'<M$

b） $E_T=\varepsilon$ のとき，$M'=M$ (7)

c） $E_T>\varepsilon$ のとき，$M'>M$．

$\mu>M$ であれば，次の関係が成り立つ．

A） $0<E_T<E_0$ のとき，$M^2-\mu^2<M'^2<0$

B） $E_T=E_0$ のとき，$M'=0$

C） $E_0<E_T<\varepsilon$ のとき，$0<M'<M$ (8)

D） $E_T=\varepsilon$ のとき，$M'=M$

E） $E_T>\varepsilon$ のとき，$M'>M$．

$E_T>\varepsilon$ である c）と E）の場合においてのみ，タキオンの吸収・放出反応は，$M'>M$ でのブラディオンとルクソンの吸収・放出反応（1）と同様に起こり得る．

ところが，a）と C）の場合は，これらの反応は $M'<M$ において起こり，タキオンを吸収した系は，普通の場合のように質量を増大させるのではなく，逆に減少させる．

$E_T=\varepsilon$ である b）と D）の場合，タキオンを吸収または放出した粒子は固有質量を変えない．それゆえ，粒子（ブラディオン）は，タキオンを吸収・放出しても，自己のエネルギーを ε だけ飛躍的に増加させるが，他の粒子には転化しない．

もちろん，このような過程は，タキオンがスピン 0 をもち，何らチャージなどを有さず，したがって他の保存則が満たされているときに限ってはじめて起こり得る．

$E_T=E_0,\ M'=0$ である B）の場合，ブラディオンはタキオンを吸収してルクソンに転化し，反応

$$\Lambda \leftrightarrows B+T \tag{9}$$

が起こり得る．

$0<E_T<E_0$ である A）の場合，ブラディオンはタキオンを吸収してタキオンに転化し得，反応

$$T' \leftrightarrows B+T \tag{10}$$

が起こり得る．したがって，タキオン気体から，ブラディオン，すなわち通常の物質の生成が可能となる．ただ，(9),(10) の《エキゾチックな反応》は，$\mu>M$ が満たされるときに限って起こり得ることに注意しよう．容易に分かるように，これまで見てきた反応以外にも，タキオンまたはルクソンのタキオン対への崩壊，ならびにルクソンのタキオンとルクソンへの転化反応

$$T_3 \leftrightarrows T_1+T_2, \quad \Lambda \leftrightarrows T_1+T_2, \quad \Lambda' \leftrightarrows \Lambda+T \tag{11}$$

が可能である．(11) の最後の反応は，(3) によれば，

$$\mu^2=2\left(E_T-\frac{\vec{P}\vec{P}_T}{E}\right)E \tag{12}$$

が成り立つときに起こる．

$E_T=0,\ \vec{P}_T=\vec{n}_T\mu$ である基準系では，(12) は，

$$\mu=-2\vec{n}\vec{n}_T E \tag{13}$$

と書ける．

ここで，$\vec{n}=\vec{P}/E$ は，ルクソンの運動方向を表わす単位ベクトル，$\vec{n}_T$ は同様にタキオンの場合の単位ベクトルを表わす．したがって，$\mu=2E$ であれば $\vec{n}\vec{n}_T=-1$ の反応が起こり得る．このことから，運動量 $2E$ をもつタキオンを吸収して，自己のエネルギー E を変化させることなく，運動方向を $180°$ 反対方向に変えるようなルクソンの運動が可能となる．

3. 《反電話》の例としてよくあげられる空間的に隔離された送信器 (E), 受信器 (A) とタキオン (T) から成る系を考えよう [9].

送信器と受信器は固定されており，それぞれ固有質量 M_E と M_A をもつとし，E から A への《信号》または情報の伝達により，E は固有エネルギー $\varDelta_E$ だけ減少し，A は固有エネルギーを $\varDelta_A$ だけ増加させるとしよう.

この場合，E と A は固定されており，$\vec{P}_E=\vec{P}_A=0$ であるから (3) より

$$M'_E-M^2_E=-2M_EE_T+M^2_T\,, \tag{14}$$

$$M'^2_A-M^2_A=2M_AE_T+M^2_T\,, \tag{15}$$

が成り立つ.

(14), (15) の両辺をそれぞれ M_E と M_A で割算し，辺々加えると，

$$M^2_T\left(\frac{1}{M_E}+\frac{1}{M_A}\right)=\frac{M'^2_E-M^2_E}{M_E}+\frac{M'^2_A-M^2_A}{M_A} \tag{16}$$

を得る.

$$M'_E=M_E-\varDelta_E,\quad M'_A=M_A+\varDelta_A \tag{17}$$

であるから，(16) より

$$2(\varDelta_A-\varDelta_E)+\frac{\varDelta^2_E}{M_E}+\frac{\varDelta^2_A}{M_A}=\left(\frac{1}{M_E}+\frac{1}{M_A}\right)M^2_T\,. \tag{18}$$

《信号》がタキオンによって伝達されるのであれば，$M^2_T<0$ であるから，(18) より

$$\varDelta_A<\varDelta_E-\frac{\varDelta^2_E}{2M_E}-\frac{\varDelta^2_A}{2M_A} \tag{19}$$

が成り立つときに限って，このような過程は起こり得る.

$\varDelta_A=\varDelta_E$ であるような理想的な信号では (19) は成り立たず，したがって，このような理想的な信号はタキオンによっては実現できないことが分かる. それゆえ，理想的な信号 ($\varDelta_A=\varDelta_E$) については (「受信器に送信器が信号を送る前に受信してしまう」という) タキオンによる《反電話》のパラドックスは，根拠がないと言える. このような過程に対しては，タキオンを用いることができないからである.

参 考 文 献

[1] A. Einstein,「著作集」, モスクワ, 第1巻, (1965) p. 62, p. 76
[2] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329
[3] S. Tanaka, Prog. Theor. Phys., **24** (1960) 171
[4] J. P. Terletsky, Journ. de Phys. et Radium., **21** (1960) 681
[5] O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan, American Journ. of Phys., **30** (1962) 718
[6] G. Feinberg, Phys. Rev., **159** (1967) 1089
[7] Ya. P. Terletskii,「相対性理論のパラドックス」, モスクワ,《ナウカ》出版, (1966).
[8] Ya. P. Terletskii,「タキオンの吸収・放出反応の運動学」, プレプリント JINR P2-11149, Dubna, (1977).
[9] G. A. Benford, D. L. Book, and W. A. Newcomb, Phys. Rev., **D2** (1976) 263

タキオンを放出・吸収する粒子の偶然（確率）運動

Ya. P. テルレツキー

「重力と素粒子論の諸問題」，第17巻，モスクワ，《Energoatom》出版，(1986)

たびたび指摘してきたように[1-4]，タキオン $T(M^2<0)$ は，ブラディオン $B(M^2>0)$ とルクソン $\Lambda(M^2=0)$ と異なり，ブラディオン B,b の質量を変えることなくブラディオンによって吸収・放出されるので，反応

$$B+T\leftrightarrows B \tag{1}$$

が起こり得る．（ここで M は粒子の固有質量を表わす．）ブラディオン B とルクソン Λ の吸収・放出反応は反応

$$B+b\leftrightarrows B',\quad B+\Lambda\leftrightarrows B' \tag{2}$$

において，B' の質量が B の質量に等しくないとき $(M'\neq M)$ に限って起こり得る．ところが反応 (1) では $M'=M$ である．反応 (1) の可能性は，タキオンの吸収・放出過程の相対論的運動学から導かれる．エネルギー E，運動量 $\vec{P}$ および固有質量 M の間の相対論的関係式

$$E^2/c^2-\vec{P}^2=M^2c^2 \tag{3}$$

を考慮し，質量 M の粒子が，質量 M_T の粒子を吸収して質量 M' の粒子に転化されることに注意すると，保存則から，

$$\begin{aligned}M^2c^2&=(E+E_T)^2/c^2-(\vec{P}+\vec{P}_T)^2\\&=c^2M^2+c^2M_T^2+2(EE_T/c^2-\vec{P}\vec{P}_T).\end{aligned} \tag{4}$$

これを変形して

$$(E/c)\Delta E/c-\vec{P}\Delta\vec{P}=(c^2/2)(M'^2-M^2-M_T^2) \tag{5}$$

を得る．ただし，

$$\Delta E=E_T=E'-E\ ;\ \Delta\vec{P}=\vec{P}_T=\vec{P}'-\vec{P}$$

は質量 M_T の粒子を吸収した粒子のエネルギーと運動量の増加分を表わす.
(5) で $M'=M$ とすると

$$(E/c)\Delta E/c-\vec{P}\Delta\vec{P}=-c^2M_T^2/2 \tag{6}$$

を得るが, 第1の粒子の静止系 ($\vec{P}=0$, $E=Mc^2$) では,

$$\Delta E=-c^2M_T^2/2M=-(Mc^2/2)(M_T/M)^2 \tag{7}$$

が成り立つ. 静止粒子ブラディオンは自己のエネルギーを増大させるだけであるから $\Delta E>0$ となり, (7) は $M_T^2<0$ のときのみ, すなわちタキオン (ブラディオンとかルクソンではなく) の吸収のときのみ成り立つ.

ブラディオンが, 何らチャージをもたないタキオンを放出・吸収して中性の気体と平衡状態にあれば, この粒子はタキオンの放出・吸収過程で固有質量を変えることなく, そのエネルギーと運動量を変化させる. そのため, この粒子はブラウン粒子のように運動することになる.

$\Delta E\ll E$ である《非相対論的》な場合に, タキオンを放出・吸収するブラディオンの偶然 (確率) 運動を考察しよう. この場合, (7) より

$$\mu=-iM_T\ll M \tag{8}$$

が成り立つ. ここで, μ は $M_T=i\mu$ で定義する. この場合, 粒子のエネルギーは非相対論的な値

$$E=Mc^2+\vec{P}^2/2M \tag{9}$$

をとるので,

$$\begin{aligned}\Delta E&=(1/2M)[(\vec{P}+\Delta\vec{P})^2-\vec{P}^2]\\&=\vec{P}\Delta\vec{P}/M+(\Delta\vec{P})^2/2M\end{aligned} \tag{10}$$

と表わされる. ここで $\Delta\vec{P}$ はタキオンの吸収・放出過程における運動量の増加分である. (9) と (10) より

$$\begin{aligned}E\Delta E/c^2&=\frac{1}{c^2}\left(Mc^2+\frac{\vec{P}^2}{2M}\right)\left(\frac{\vec{P}\Delta\vec{P}}{M}+\frac{(\Delta\vec{P})^2}{2M}\right)\\&\approx\vec{P}\Delta\vec{P}+\frac{(\Delta\vec{P})^2}{2}\end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$\vec{P}^2/2M \ll Mc^2$ であるから，$\vec{P}^2/Mc^2$ を含む項は無視した．(11) と (7) より

$$(\varDelta\vec{P})^2/2 = E\varDelta E/c^2 - \vec{P}\varDelta\vec{P}$$
$$= -c^2M_T^2/2 = \mu^2c^2/2 \tag{12}$$

が成り立ち，したがって

$$|\varDelta\vec{P}| = \mu c \tag{13}$$

を得る．これより，タキオンの1回当りの吸収・放出について，粒子の運動量は

$$\varDelta\vec{P} = \mu c\vec{n} \tag{14}$$

だけ変化することがわかる．ここで，タキオン気体が等方的であれば，$\vec{n}$ は任意の方向を向く単位ベクトルである．

タキオンの N 回の吸収・放出後，(14) よりブラディオンは運動量

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} \mu c\vec{n}_k \tag{15}$$

を得る．ここで $\vec{n}_k$ は偶然の方向をもつ単位ベクトルである．このようなブラディオンの偶然運動に対して，タキオンの N 回の吸収・放出の結果，ブラディオンが所定の運動量 $\vec{P}$ をもつ確率密度 $W_N(\vec{P})$ は容易に計算できる．このような問題は，所定の距離 l だけ N 回偶然移動するブラウン粒子に対してしばしば論じられてきた．たとえば，このような《酔歩》の問題は [5] に詳しい記述がある．

《酔歩》の用語を用いて，粒子が毎回 $\vec{n}_k$ $(k=1, \cdots, N)$ の方向に l だけ進むとすれば，N 歩後の変位ベクトル $\vec{R}$ は，(15) と同様に

$$\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z = \sum_{k=1}^{N} l\vec{n}_k \tag{16}$$

と表わされ，N 歩後の変位 $\vec{R}$ の確率は，

$$W_N(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[\vec{R} - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i\right] \prod_{k=1}^{N} W_k(\vec{r}_k)\, d\vec{r}_k \tag{17}$$

で与えられる．ただし，$W_k(\vec{r}_k)$ は変位 $\vec{r}_k$ の確率を表わし

$$W_k(\vec{r}_k)=\delta(\vec{r}_k^2-l^2)/2\pi l,$$
$$=\delta(r_k-l)/4\pi l^2 \tag{18}$$

に等しい.

$$\delta\left[\vec{R}-\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\vec{\eta}\left[\vec{R}-\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\right]\right\}d\vec{\eta} \tag{19}$$

と表わされることを用いて, (18) と (19) を (17) に代入すると

$$W_N(\vec{R})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\vec{R}\vec{\eta})\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\vec{\eta}\vec{r})\frac{\delta(r-l)}{4\pi l^2}d\vec{r}\right\}^N \tag{20}$$

を得る. 中括弧の中の積分は, 球座標系では $d\vec{r}=r^2dr\sin\theta\,d\theta\,d\phi$, $\vec{\eta}\vec{r}=\eta r\cos\theta$ であることを考慮すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\vec{\eta}\vec{r})\frac{\delta(r-l)}{4\pi l^2}d\vec{r}$$
$$=\frac{1}{4\pi l^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-i\eta r\cos\theta)\,\delta(r-l)r^2dr\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp(-i\eta l\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{\sin(\eta l)}{\eta l} \tag{21}$$

に等しい. したがって, (20) より

$$W_N(\vec{R})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\vec{R}\vec{\eta})\left[\frac{\sin(\eta l)}{\eta l}\right]^N d\vec{\eta}. \tag{22}$$

$\vec{\eta}$ について球座標系を用いると, $d\vec{\eta}=\eta^2d\eta\sin\Theta d\Theta d\Phi$, $\vec{R}\vec{\eta}=R\eta\cos\Theta$ であるから, (22) を Φ について積分すると

$$W_N(\vec{R})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\eta^2\exp(iR\eta\cos\Theta)\sin\Theta\left[\frac{\sin(\eta l)}{\eta l}\right]^N d\Theta\,d\eta$$

を得, 次に Θ ついて積分すると,

$$W_N(\vec{R})=\frac{1}{2\pi^2R}\int_0^{\infty}\sin(R\eta)\left[\frac{\sin(\eta l)}{\eta l}\right]^N\eta\,d\eta \tag{23}$$

を得る. この式をタキオン気体中のブラディオンに適用する. そのためには, $\vec{R}\to\vec{P}$, $\mu\to c$ とすればよい. すなわち,

$$W_N(\vec{P})=\frac{1}{2\pi^2P}\int_0^{\infty}\sin(P\eta)\left[\frac{\sin(\eta l)}{\eta l}\right]^N\eta\,d\eta. \tag{24}$$

次に，Chandrasekar の近似 [5, p. 28] によると，$N\to\infty$ で

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\sin(\eta l)}{\eta l}\right]^N \approx \exp\left(-N\eta^2\frac{l^2}{6}\right) \tag{25}$$

が成り立つので，$N\to\infty$ での $W(R)$ は

$$W(R)=\frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{Nl^2}{6}\eta^2\right)\eta\sin(RN)d\eta\,,$$

$$\approx\frac{1}{(2\pi Nl^2/3)^{3/2}}\exp\left(-\frac{3R^2}{2Nl^2}\right) \tag{26}$$

と表わされる．

(26) において，$N=t/\tau$ [t：粒子を観測する時刻，τ：(酔)歩の間の時間間隔] とすると，

$$W(R)=\frac{1}{(2\pi tl^2/3\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{3R^2\tau}{2tl^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{R^2}{4Dt}\right). \tag{27}$$

ここで，$D=l^2/6\tau$ である．このようにして，拡散方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}=D\nabla^2 W \tag{28}$$

と等価な，Einstein-Fokker-Planck 方程式の周知の解を得た．

タキオン気体中のブラディオンの場合には，(27) と (28) において $R\to P$，$l\to\mu c$ と置き換えて，次式を得る．

$$W(P)=[1/(4\pi Bt)^{3/2}]\exp(-P^2/4Bt)\,. \tag{29}$$

ただし，$B=(\mu c)^2/6\tau$ である．また

$$\partial W/\partial t=B\nabla_P^2 W,\quad \nabla_P^2=\partial^2/\partial P_x^2+\partial^2/\partial P_y^2+\partial^2/\partial P_z^2 \tag{30}$$

は Einstein-Fokker-Planck 型の方程式であり，これより，

$$\overline{(\Delta P)^2}=2Bt=[(\mu c)^{2/3}]t/\tau \tag{31}$$

などが導かれる．

こうして，タキオン気体と相互作用するブラディオンは，Einstein の式に類似した (31) に従って，連続的に運動量を増大させることがわかる．

参 考 文 献

[1] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329
[2] J. P. Terletsky, Journ. de Phys., **21** (1960) 681
[3] Ya. P. Terletskii, 「相対性理論のパラドックス」, モスクワ, 《ナウカ》出版, (1966)
[4] Ya. P. Terletskii, 「運動学的に許容されたタキオンの生成・吸収反応」, 「重力と電磁気」, ミンスク, 《BGU》出版, (1981) p. 48
[5] S. Chandrasekar, 「物理学と天文学における確率論的問題」, モスクワ, 《外国文献》出版, (1947) p. 168

負の質量と宇宙のエネルギー源*)

Ya. P. テルレッツキー

Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 7, n°1, (1982)

1. 負の質量をもつ粒子を否定する全ての禁止則は力学，相対論，量子力学などの力学理論に由来するものではなく，因果律，時間非逆行性，相補原理などの補足的な仮定から生じるものと考えられる [1, 2]．ところが，これらの補足的な仮定は実質上熱力学の第二法則の帰結である [3]．既存の熱力学は正の質量をもつ粒子に対してのみ妥当であり，正質量と負質量が相互作用する系がもっと一般化された非平衡な熱力学に従うものであれば，負質量の粒子の存在を否定する全ての既知の禁止則は，根拠を失うことになる [5].

2. 以下では，負質量の粒子は《ネガトン (negaton)》，正質量の粒子では《ポジトン (positon)》と呼ぶ (以前には [2, 4, 5]，それぞれマイナス粒子，プラス粒子と呼んだ)．等価原理によると，宇宙におけるネガトンの分布はほぼ一様である [2, 4, 7, 9, 10]．ポジトンから成る系は正の絶対温度で平衡状態に近づこうとするが，ネガトンから成る系は負の絶対温度で平衡状態に近づくはずである [5, 8]．したがって，ポジトンとネガトンの混合系は，正の絶対温度と負の絶対温度をもつ 2 つの相互作用系の集まりと考えられる．このような場合，両系の自発的な過熱が起こる [8]．この過熱過程は，宇宙線の一次成分中に含まれる粒子の加速機構の 1 つでありうる [2, 6]．これはまた準星および銀河核における異常なエネルギーの放出を説明しうる機構に

*) この論文の一部は，1981 年開催の重力問題に関する Erice 国際会議で報告された.

もなりうる [2, 4, 6].

3.　ポジトンとネガトンの混合系において進行する過程の時間対称性から，これら粒子の多重生成の可能性は，それらの相互消滅の可能性と同じであると考えられる．ここでは，これら粒子の多重生成と消滅過程は無視して弾性衝突に限定して考えることにする．星，惑星などを貫通するネガトンは，その過程で絶えず加速を受けるので，超相対論的エネルギー E をもって実質上直進するはずである．[2, 6] によれば，

$$\frac{d}{dt}|E|=(n_+\sigma_{-+}c)|E|\,.$$

ただし，n_+ はポジトンの密度，σ_{-+} はネガトン—ポジトンの弾性散乱の断面積を表わす．したがって，厚さ L の物質層を通過した後のネガトンのエネルギーは，

$$|E|=|E_0|\ \exp(n_+\sigma_{-+}L)$$

と表わされる．ポジトンのエネルギーも同量だけ増加する．半径 R の球面に，πR^2n_-c（n_-：ネガトンの密度）のネガトンのフラックスが流入すると，一秒間当りに放出されるエネルギーは，

$$Q=\pi R^2cn_-|E_0|\ \exp(n_+\sigma_{-+}R)$$

となる．この式から明らかなように，

$$n_+\sigma_{-+}R\gg1$$

であれば，エネルギーの放出は，カタストロフィー的に増大するだろう．太陽の放出するエネルギー $3.8\cdot10^{33}$ erg/s から σ_{-+} の大きさを推定しよう．Q はこの値を越えることはない．[2, 10] より，$n_-=10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-3}$，$|E_0|=0.2\cdot10^{-16}$ erg とし，太陽についての値 $R_\odot=7\cdot10^{10}$ cm，$n_+\simeq10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3}$ を用いると，

$$\sigma_{-+}<1.4\cdot10^{-35}\,\mathrm{cm}^2$$

を得る．

中性子星の場合，$m=2m_{\odot}$, $n_{-}=10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-3}$ とすると，

$$\sigma_{+-}<2\cdot10^{-45}\,\mathrm{cm}^2$$

となる．したがって，ネガトンとポジトンの相互作用は核子—核子相互作用よりも弱いが，弱い相互作用より強くなりうる．

参 考 文 献

[1] Ya. P. Terletskii, 「統計物理学」, 《North-Holland》出版, アムステルダム—ロンドン, (1971)

[2] Ya. P. Terletskii, 「相対性理論のパラドックス」, 《ナウカ》出版, (1965) ; 《Plenum Press》, ニューヨーク, (1968)

[3] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329

[4] J. P. Terletsky, Journ. de Phys., **23** (1962) 910

[5] Ya. P. Terletskii, Izv. Vysh. Uch. Zav. (Fizika), **6** (1964) 122

[6] Ya. P. Terletskii, 「準星源と重力崩壊」, 《シカゴ大学プレス》, シカゴ—ロンドン, (1965) p. 466

[7] Ya. P. Terletskii, 「相対論的重力理論に関する国際会議」, ロンドン, (1965)

[8] Ya. P. Terletskii, 「UDN 論文集」, (1965) p. 53

[9] Ya. P. Terletskii, 「重力理論の現代的諸問題」, トビリシ, (1967)

[10] V. P. Kolpakov and Ya. P. Terletskii, Izv. Vysh. Uch. Zav. (Fizika) **6** (1976) 134

ブラディオン，ルクソンおよびタキオンの時空構造

Ya. P. テルレッツキー

Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 11, n°1, 1986

本稿ではブラディオン，ルクソン，ストリングおよびタキオンを表わす物理場の非線形方程式に対する正則な解の時空構造を調べる.

非線形場の理論では，素粒子は物理場の非線形方程式の正則な解によって表わされると考えられている．既に Einstein は，ある種の素粒子ブラディオンは非線形方程式の正規粒子状解——3次元ソリトン——と考えていた．このような理論では，場の方程式が正しく選択されれば，粒子の基本パラメータ——質量スピン，チャージなど——の計算ができる．この点は各種類の粒子がそれ自身の線形場とその解に関連づけられており，相補性の原理により粒子構造のいかなる時空的表象も理論から排除されている，従来の素粒子の量子論にない特長と言える.

非線形場の理論の量子化の問題はある種の困難に遭遇するが，疑いもなくこの理論の多くの長所は認められており，幅広く研究されている.

非線形場の理論は，またストリングや，(タキオンのような) エキゾチックな粒子などの基本的な対象を明らかにして研究することを可能にする．オーソドックスな場の量子論ではこのような対象は，新しい素粒子としてアプリオリに与えられた新しい場により，相互作用に関する仮説を置いて導入される.

非線形場の理論に基づき，非線形場の正規解の立場から，ブラディオン，ルクソン，タキオン，ストリングなどの各種の基本的な対象の主な構造上の特性を調べてみよう.

今，$\psi_{ijk}\cdots(x, y, z, t)$ は非線形微分方程式を満たす場を記述するとしよう．最も単純な場合，それは単一のスカラー関数であり，たとえば，

非線形 Klein–Gordon 方程式

$$\Box\psi+\mu^2[1+F(\psi^*\psi)]\psi=0 \tag{1}$$

を満たす複素関数の解である．$F(\psi^*\psi)$ は非線形項で，簡単のために $\alpha\psi^*\psi$ の形を仮定しよう．

この方程式は

$$\psi=U(r)e^{i\omega t}, \quad (r^2=x^2+y^2+z^2) \tag{2}$$

で表わされる球対称の粒子様の解をもつ [1]．ただし，(2) を (1) に代入して得られる，関数 U の方程式

$$\varDelta U+\{\omega^2+\mu^2[1+F(U^2)]\}U=0 \tag{3}$$

は，$r=0$ の領域において有限であり，$r\gg r_0=l$ では急速に 0 に近づく正則な解をもつとする．

x 軸に沿って速度 β で運動している参照系では，ローレンツ変換により，(2) の関数 ψ は，

$$\psi'=U\left\{\sqrt{y'^2+z'^2+\frac{(x'+\beta t')^2}{1-\beta^2}}\right\}\exp\left\{i\omega\frac{t'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\} \tag{4}$$

と表わされる．

今，l を粒子に特有な空間サイズとすれば，運動する粒子の x, y, z 方向の各サイズは，

$$l'_x=l\sqrt{1-\beta^2}, \quad l'_y=l, \quad l'_z=l \tag{5}$$

と表わされ，運動軸方向に沿うスケールの収縮効果，あるいは粒子の平担化が起こることが分る．

方程式 (3) は，また

$$\psi=V(\rho)e^{i(\omega t-Kx)}, \quad (\rho^2=y^2+z^2) \tag{6}$$

で表わされる円筒対称あるいはストリング的な解をもつ [2]．ただし，この場合も，方程式

$$\varDelta_\rho V+\{\omega^2-K^2+\mu^2[1+F(V^2)]\}V=0, \tag{7}$$

$$\varDelta_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

はUの解と同様な正則な解をもつとする．

(6) によって記述されるストリングの長さは，x 軸方向では無限大になるが，y 軸と z 軸方向の幅は有限で，x 軸方向に運動するすべての参照系で等しい．比 $\omega/K=U$ は，$U>1$, $U=1$, $U<1$ のいずれの値をもとり得ることに注意しよう．この3つの場合は，それぞれブラディオン，ルクソンおよびタキオンタイプのストリング様解に相当する．

次にタキオンとルクソンの場合の関数 $\psi_{ijk\cdots}(x,y,z,t)$ に対する解の一般形について考えてみよう．簡単のために，ブラディオンとストリングの場合と同様，単一の関数 $\phi(x,y,z,t)$ に限定し，非線形方程式の厳密な形も当座の間問題にしないでおこう．

タキオンは超光速で運動する仮説粒子である．この粒子はいかなる現実的な参照系においても静止できない．しかし，点状のタキオンが，x 軸方向に無限大の速度で運動をする参照系では，時刻 $t=0$ において瞬間的に出現し消滅する無限のストリングとして表わすことができる．すなわち，

$$\phi(x,y,z,t)=\delta(y)\delta(z)\delta(t). \tag{8}$$

この特別な参照系では点状ではないリアルなタキオンは，明らかに関数

$$\phi=V\left(\frac{\rho}{l}\right)f\left(\frac{t}{\tau}\right),\quad(\rho^2=y^2+z^2) \tag{9}$$

で表わせる．ただし $V\left(\frac{\rho}{l}\right)$ と $f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ は，それぞれ「有効幅」l と τ の正規関数である．(9) 式で記述されたタキオンの空間サイズは，x 軸方向には無限大であるが，垂直方向のサイズは l に等しいことが分る．x 軸方向に速度 β で運動する参照系では，関数 (9) は，ローレンツ変換により，

$$\phi=V(\rho)f\left(\frac{t'+\beta x'}{\tau\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{10}$$

と書ける．

したがって，時刻 $t'=0$ においては，関数 ϕ は空間的な「有効幅」：

$$l'_x=\frac{\tau\sqrt{1-\beta^2}}{\beta},\quad l'_y=l,\quad l'_z=l \tag{11}$$

をもち，$\beta\to0$ のとき，$l'_x\to\infty$ となるが $\beta\to1$ では

$$l'_x=\frac{\tau}{\beta}\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}\sim\tau\sqrt{2(1-\beta)}$$

となる．

ストリング様解 (6) は，関数 $f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ が正則でなく無限の「幅」をもつという点で，タキオン様解 (9) とは異なることに注意しよう．

光速で運動する粒子，ルクソンは，関数

$$\phi=f\left\{\frac{\rho}{l},\frac{x-t}{l_x}\right\},\quad(\rho^2=y^2+z^2) \tag{12}$$

で記述される．ただし，関数 ϕ は，座標 ρ と変数 $(x-t)$ に関して正則的であるとする．点状のルクソンは，明らかに，関数

$$\phi=\delta(y)\delta(z)\delta(x-t) \tag{13}$$

で記述できる．

x 軸方向に速度 β で運動する参照系では，ローレンツ変換により，関数 (12) は，

$$\phi=f\left\{\frac{\rho}{l},\frac{1}{l_x}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(x'-t')\right\} \tag{14}$$

と表わされる．したがって，運動系では，固定した時刻 $t'=0$ においてルクソンの「有効幅」は

$$l'_x=l_x\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{15}$$

に等しい．

元の系では $\beta=0$ であるから，(15) から当然 $l'_x=l_x$ を得る．またルクソンを追う系 $(\beta>0)$ では，ルクソンは運動方向に伸び，ルクソンに向って運動する．$(\beta<0)$ 系では，ルクソンは収縮することが分る．

本稿では，タキオン解 (10) またはルクソン解 (12) を与えるような具体的

な非線形方程式を扱わなかった．これは将来の課題である．ただ，最も単純な形の方程式（1）は，タキオン型の（9）あるいは（10）の解をもたないことを指摘しておく．

この方程式は，タキオン型の空間平面解

$$\phi=f\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{または} \quad \phi=f\left(\frac{t'+\beta x'}{\tau\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{16}$$

をもつ．ただし，（16）の関数 f は，方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\mu^2[1+F(f^2)]f=0 \tag{17}$$

を満たす．変数 $\xi=x-Ut$ を用いると，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(1-U^2)+\mu^2[1+F(f^2)]f=0 \tag{18}$$

となり，この関数 f は，$U>1$ で係数 μ を適当に選べば正則的なものになりうる．しかし，（16）の解である，このような関数 f は，y 方向と z 方向共に空間的に制限されないためにタキオン粒子を表わす解とは考えられない．

方程式（1）において特別なタイプのルクソン解（12）は，ストリング様の解

$$\phi=V(\rho)e^{iS(x-t)} \tag{19}$$

の形であれば可能となる．ここで ρ は方程式

$$\Delta_\rho V+\mu^2[1+F(V^2)]V=0 \tag{20}$$

を満たし，$S(\xi)$ は変数 $x-t$ の任意の関数である．

特別な場合として $S=\delta(\xi-\pi/4)$ を仮定すると

$$\exp\{iS(\xi)\}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,\delta(\xi)=\exp(i\pi/4)\,\delta(\xi)$$

を得る．

現実の光子は，非線形な電磁場方程式のルクソン解として記述できよう．

参 考 文 献

[1] V.B. Glasko, F. Leruste, Ya. P. Terletskii, S.F. Shushurin, J.E.T.P., **35** (1958) 452

[2] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **236** (1977) 828

[3] Ya. P. Terletskii, DAN USSR, **133** (1960) 329

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

ヤ　行

ラ　行

訳者あとがき

相対性理論は，われわれの日常的な「常識」を破る物理理論として，物理学を専門としない一般読者のあいだにもファンが多い．そのためでもあろう，相対性理論の入門書やテキスト類は翻訳書も含めて実に多い．これら書物の記述には，難易とか程度の差はあれ，「標準的な」パターンができあがっている，とさえ言える．

本書はそうした「標準的な」類書とは異なる，かなりユニークな相対性理論の本である．その第一の理由は，「パラドックス」に満ちた相対性理論の意味を「パラドックス」の解明という形をとりながら，深く掘り下げ分析する，という手法をとっていることにあろう．このことは，主に第4章までの前半でなされており，(「標準的な」アプローチでは中心的な役割を果たす) 光速不変の要請に基づかないでローレンツ変換を導いてみせるなどして，理論の本質を，ときには批判的に，明らかにしている．

第5章以降では，通常の「相対性理論」を越えて，超光速粒子タキオンとか負の質量の粒子の存在という大胆な仮説や，これら「異端的な」粒子の存在がどのような物理的帰結をもたらし得るか，を論じている．これも類書に見られない特徴といえる．著者の深い理論的な洞察力と創造力は，通常の相対性理論の入門書や教科書には見られない新鮮さと独創性を本書に与えている．

タキオンについては，20年以上も前の本書の初版がパイオニア的な役割を演じた．それ以来，わが国でも，本間三郎氏による『超光速粒子タキオン』

（講談社，ブルーバックス）などの解説書も出版され，タキオンの概念は広く一般にも浸透した.

本書は標準的な入門書やテキストにより相対性理論を学び，この理論をさらにより深く理解したいと希望する読者には最適の書物であろう．また，タキオンとか負の質量の粒子など，現代物理学からは「異端的」に見えるこれら粒子の物理について知りたいと思う読者にも，この分野の本格的な入門書になり得よう.

今回の「増補新版」では，読みやすい文体に改めるなど「前版」を大幅に改訳した．また「初版」以後，著者 Ya. P. テルレッツキー教授が発表してきたタキオンや負の粒子の質量に関する論文の一部を付録として付して，この分野の発展を紹介することにした.

今回の「増補新版」にあたり，新たに「付録」の論文を提供して戴いた Ya. P. テルレッツキー教授，訳稿に目を通してくれた勝浦一雄氏，また出版に際していろいろお世話になった東京図書の須藤静雄氏ならびに田沢直樹氏には厚くお礼を申し上げたい.

1989年9月7日　　林　昌樹

訳者紹介

中村誠太郎（なかむらせいたろう）	1941年	京都大学理学部卒業
	現　在	東海大学教授，理学博士
林　昌樹（はやしまさき）	1970年	クラコウ大学大学院博士課程修了
	現　在	埼玉医科大学教授，理学博士

相対性理論のパラドックス（増補新版）

1966年10月31日　第1刷発行　　Printed in Japan
1989年10月20日　増補新版第1刷発行

検印省略

著　者　Ya. P. テルレッツキー
監修者　中　村　誠　太　郎
訳　者　林　　昌　　樹
発行所　**東京図書株式会社**
〒112 東京都文京区水道2—5—22
振替 東京4—13803 電話 03(814)7818～9

ISBN 4-489-00305-6